LES MODELES VAR A CORRECTION D'ERREUR

1 GENERALITES SUR LES Modèles Vectoriels Autorégressifs (VAR)

1.1 Ecriture d'un VAR

Partons d'un modèle à plusieurs équations où chaque variable endogène est expliquée par les autres variables en t, t-1, ..., t-r et par elle-même en t-1, t-2 ..., t-r. C'est la forme structurelle d'un système d'équations.

Ecrivons ce système pour k=3 variables endogènes

$$
\begin{aligned}
x_t &= \sum_{i=1}^{r} a_{1i}x_{t-i} + \sum_{i=0}^{r} b_{1i}y_{t-i} + \sum_{i=0}^{r} c_{1i}w_{t-i} + d_1 + u_{1t} \\
y_t &= \sum_{i=0}^{r} a_{2i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} b_{2i}y_{t-i} + \sum_{i=0}^{r} c_{2i}w_{t-i} + d_2 + u_{2t} \\
w_t &= \sum_{i=0}^{r} a_{3i}x_{t-i} + \sum_{i=0}^{r} b_{3i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} c_{3i}w_{t-i} + d_3 + u_{3t}
\end{aligned}
$$

On met le nombre de retards r nécessaires pour que toutes les erreurs de ces modèles soient des bruits blancs (BB). En regroupant les termes en t

$$
\begin{aligned}
x_t - b_{10}y_t - c_{10}w_t &= \sum_{i=1}^{r} a_{1i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} b_{1i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} c_{1i}w_{t-i} + d_1 + u_{1t} \\
y_t - a_{20}x_t - b_{20}w_t &= \sum_{i=1}^{r} a_{2i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} b_{2i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} c_{2i}w_{t-i} + d_2 + u_{2t} \\
w_t - a_{30}x_t - b_{30}y_t &= \sum_{i=1}^{r} a_{3i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} b_{3i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} c_{3i}w_{t-i} + d_3 + u_{3t}
\end{aligned}
$$

On pose les vecteurs $\overrightarrow{z_t} = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ w_t \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{u_t} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -b_{10} & -c_{10} \\ -a_{20} & 1 & -c_{20} \\ -a_{30} & -b_{30} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients en t et

$C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} & b_{1i} & c_{1i} \\ a_{2i} & b_{2i} & c_{2i} \\ a_{3i} & b_{3i} & c_{3i} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients en $t-i$

$$C\overrightarrow{z_t} = \sum_{i=1}^{r} C_i \overrightarrow{z_{t-i}} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{u_t}$$

en multipliant à gauche par C^{-1}

$$\overrightarrow{z_t} = \sum_{i=1}^{r} C^{-1}C_i\overrightarrow{z_{t-i}} + C^{-1}\overrightarrow{d} + C^{-1}\overrightarrow{u_t}$$

le modèle devient

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_{1i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\beta_{1i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\gamma_{1i}w_{t-i} + m_1 + e_{1t} \qquad (1) \\ y_t &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\beta_{2i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\gamma_{2i}w_{t-i} + m_2 + e_{2t} \\ w_t &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_{3i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\beta_{3i}y_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\gamma_{3i}w_{t-i} + m_3 + e_{3t} \end{aligned}$$

On pose $\quad \overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{e_t} = \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix}$

Ces trois équations s'écrivent

$$\overrightarrow{z_t} = A_1\overrightarrow{z}_{t-1} + A_2\overrightarrow{z}_{t-2} + ... + A_l\overrightarrow{z}_{t-l} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t} \qquad (2)$$

où les A_j sont des matrices $(3,3)$ $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} & \beta_{1j} & \gamma_{1j} \\ \alpha_{2j} & \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \alpha_{3j} & \beta_{3j} & \gamma_{3j} \end{pmatrix}$

1.2 Exemple de transformation d'un VAR

Prenons le cas de k=2 variables endogènes et $r = 2$

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=1}^{2}\alpha_{1i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{2}\beta_{1i}y_{t-i} + m_1 + e_{1t} \qquad (3) \\ y_t &= \sum_{i=1}^{2}\alpha_{2i}x_{t-i} + \sum_{i=1}^{2}\beta_{2i}y_{t-i} + m_2 + e_{2t} \end{aligned}$$

la première équation s'écrit :

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha_{11}x_{t-1} + \alpha_{12}x_{t-2} + \beta_{11}y_{t-1} + \beta_{12}y_{t-2} + m_1 + e_{1t} \qquad (4) \\ x_t - x_{t-1} &= (\alpha_{11} + \alpha_{12} - 1)x_{t-1} - \alpha_{12}(x_{t-1} - x_{t-2}) + (\beta_{11} + \beta_{12})y_{t-1} - \beta_{12}(y_{t-1} - y_{t-2}) + m_1 + e_{1t} \\ \Delta x_t &= (\alpha_{11} + \alpha_{12} - 1)x_{t-1} - \alpha_{12}\Delta x_{t-1} + (\beta_{11} + \beta_{12})y_{t-1} - \beta_{12}\Delta y_{t-1} + m_1 + e_{1t} \end{aligned}$$

de même l'équation en y_t s'écrit

$$\Delta y_t = (\beta_{21} + \beta_{22} - 1)y_{t-1} - \beta_{22}\Delta y_{t-1} + (\alpha_{21} + \alpha_{22})x_{t-1} - \alpha_{22}\Delta x_{t-1} + m_2 + e_{2t}$$

et le système devient

$$\begin{pmatrix} \Delta x_t = (\alpha_{11}+\alpha_{12}-1)x_{t-1} - \alpha_{12}\Delta x_{t-1} + (\beta_{11}+\beta_{12})y_{t-1} - \beta_{12}\Delta y_{t-1} + m_1 + e_{1t} \\ \Delta y_t = (\beta_{21}+\beta_{22}-1)y_{t-1} - \beta_{22}\Delta y_{t-1} + (\alpha_{21}+\alpha_{22})x_{t-1} - \alpha_{22}\Delta x_{t-1} + m_2 + e_{2t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_{11}+\alpha_{12}-1) & (\beta_{11}+\beta_{12}) \\ (\alpha_{21}+\alpha_{22}) & (\beta_{21}+\beta_{22}-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\alpha_{22} & -\beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\Delta \overrightarrow{z}_t = \Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \overrightarrow{z}_{t-1} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t}$$

1.3 En généralisant: Définition d'un VAR

L'équation générale d'un VAR appélé aussi système réduit

$$\overrightarrow{z_t} = A_1 \overrightarrow{z}_{t-1} + A_2 \overrightarrow{z}_{t-2} + ... + Ar \overrightarrow{z}_{t-r} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t}$$

peut aussi s'écrire en posant $\overrightarrow{\Delta z_t} = \overrightarrow{z_t} - \overrightarrow{z_{t-1}}$

$$\Delta \overrightarrow{z}_t = \Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \overrightarrow{z}_{t-1} + ... + \Gamma \Delta \overrightarrow{z}_{t-r+1} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t} \tag{7}$$

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = \Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t} \tag{8}$$

avec $\Pi = -I + A_1 + ... + Ar$ et $\Gamma_i = -(A_{i+1} + ... + Ar\ )$ pour $i = 1, ..., r-1$.

On fait l' hypothèse que les variables endogènes sont I(1). Le vecteur $\overrightarrow{z_t}$ est donc formé de k variables I(1) et donc le vecteur $\Delta \overrightarrow{z}_t$de variables I(0). Sous ces hypothèses deux cas peuvent se présenter :

- Soit il n'y a pas de relation de cointégration entre les variables formant le vecteur $\overrightarrow{z}$. Dans ces conditions il n'y a pas de vecteur $\Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1}$ qui soit I(0) , ce vecteur reste I(1).

  Pour que le modèle (7) soit valable, il ne doit comporter que des I(0) , la matrice Π doit donc être nulle .

  Le modèle est alors un VAR classique dans lequel les écarts des variables sont fonctions seulement des écarts décalés.

- Soit il y a une ou plusieurs relations de cointégration entre les variables de $\overrightarrow{z}$ alors $\Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1}$est également I(0) et on est en présence d'un modèle VAR à correction d'erreur (**VECM**)

1.4 Ecriture d'un VAR à correction d'erreur (VECM)

1.4.1 Cas particulier de deux variables

Reprenons le cas particulier (3) et supposons qu'il existe une relation de long terme entre y_t et x_t, si elle existe, elle est unique.

$$y = ax + c + \epsilon$$

En prenant séparément les équations de (4)

$$x_t = \alpha_{11}x_{t-1} + \alpha_{12}x_{t-2} + \beta_{11}y_{t-1} + \beta_{12}y_{t-2} + m_1 + e_{1t}$$

Si $t \to \infty$ on peut faire l'approximation $x_t \simeq x_{t-1} \simeq x_{t-2}$ (idem pour y)et l'équation devient

$$y_t \simeq \frac{1-\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\beta_{11}+\beta_{12}}x_t - \frac{m_1}{\beta_{11}+\beta_{12}} - \frac{e_{1t}}{\beta_{11}+\beta_{12}}$$

de même avec

$$y_t = \beta_{11}y_{t-1} + \beta_{12}y_{t-2} + \alpha_{11}x_{t-1} + \alpha_{12}x_{t-2} + m_2 + e_{2t}$$

Si $t \to \infty$ on obtient l'équation de long terme:

$$y_t \simeq \frac{\alpha_{11}+\alpha_{12}}{1-\beta_{11}-\beta_{12}}x_t + \frac{m_2}{1-\beta_{11}-\beta_{12}} + \frac{e_{2t}}{1-\beta_{11}-\beta_{12}}$$

En comparant ces résultats au modèle de long terme on en déduit

$$a = \frac{\alpha_{11}+\alpha_{12}}{1-\beta_{11}-\beta_{12}} = \frac{1-\alpha_{11}-\alpha_{12}}{\beta_{11}+\beta_{12}} \text{ et } c = \frac{m_2}{1-\beta_{11}-\beta_{12}} = -\frac{m_1}{\beta_{11}+\beta_{12}}$$

La première équation du système (5) dépend alors du coefficient de l'équation de long terme:

$$\Delta x_t = (\beta_{11}+\beta_{12})(y_{t-1} + \frac{\alpha_{11}+\alpha_{12}-1}{\beta_{11}+\beta_{12}}x_{t-1}) - \alpha_{12}\Delta x_{t-1} - \beta_{12}\Delta y_{t-1} + m_1 + e_{1t}$$

$$\Delta x_t = (\beta_{11}+\beta_{12})(y_{t-1} - ax_{t-1}) - \alpha_{12}\Delta x_{t-1} - \beta_{12}\Delta y_{t-1} + m_1 + e_{1t}$$

La seconde devient de même

$$\Delta y_t = (\beta_{21}+\beta_{22}-1)(y_{t-1} - ax_{t-1}) - \beta_{22}\Delta y_{t-1} - \alpha_{22}\Delta x_{t-1} + m_2 + e_{2t}$$

Le système (6) peut alors s'écrire :

$$\begin{pmatrix}\Delta x_t\\ \Delta y_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_{11}+\beta_{12}\\ \beta_{21}+\beta_{22}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ -\alpha_{22} & -\beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_{t-1}\\ \Delta y_{t-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e_{1t}\\ e_{2t}\end{pmatrix} \quad (9)$$

1.4.2 Forme générale

Ainsi dans la forme générale

$$\Delta\overrightarrow{z_t} = \Pi\ \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1}\Gamma_i\Delta\overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t}$$

la matrice Π est le produit de deux matrices dont l'une B est la matrice des coefficients des variables des équations de long terme (voir dans l'exmple ci-dessus).

$$\Pi = AB^{'}$$

Quels sont les dimensions de ces matrices dans le cas général où le vecteur $\overrightarrow{z_t}$ est formé de k variables I(1) ?

La matrice Π a k lignes et k colonnes , la matrice A a k lignes et c_0 colonnes et B a k lignes et c_0 colonnes ,sa matrice transposée $B^{'}$ a donc c_0 lignes et k colonnes. La valeur de c_0 correspond au nombre d'équations de cointégration que l'on peut construire avec nos k variables. Dans l'exemple précédent cette valeur est $c_0 = 1$ car avec deux variables on ne peut construire qu'une équation. Si il n'y a aucune équation de cointégration $c_0 = 0$ et les matrice A et Π sont nulles et comme vu plus haut (1.3) le système est un VAR simple non VCEM. De plus comme dans le cas de deux variables on ne peut construire plus de k-1 équations différentes avec les k variables I(1).

Dans le cas des VECM on a donc $0 < c_0 \leq k - 1$

Tout modèle VECM s'écrit donc

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t} \tag{10}$$

Comment estimer ces modèles ? Il y a trois méthodes classiques:

- la méthode de Engel et Granger qui consiste à estimer séparément chaque équation en construisant au départ l'équation de long terme supposée unique
- la méthode de partage des équations en deux , une équation conditionnelle et les autres équations marginales , afin de traiter une seule équation comme dans le cas précédent . C'est la méthode du MCE conditionnel.
- et pour finir le cas général d'estimation globale du système, la procédure de Johansen.

Pour ces trois méthodes on étudiera les tests de cointégration et les techniques d'estimation.

2 LA METHODE D'ENGEL ET GRANGER.

Elle consiste à appliquer la méthode de Engel et Granger à chaque équation du VAR. Chaque équation est traitée séparément. Voir donc la méthode dans le chapitre sur la méthode de Engel et Granger.

2.1 Remarque:

Ce modèle peut être enrichi de variables n'intervenant pas dans l'équation de long terme. Pour cela il faut bien sur qu'elles interviennent sous forme I(0) dans (10). Ainsi, lorsque ces variables sont I(1) il faut prendre leur écart avec d'éventuels retards. Elles ne joueront aucun rôle si $t \to \infty$ car leur écart tend vers 0.

Les autres équations du système s'estimeront de la même façon, c'est-à-dire avec la même équation de long terme donc en faisant intervenir le même résidu en t-1.

3 LES MCE CONDITIONNELS

Ils sont construits comme la procédure précédente pour estimer les modèles VECM équation par équation.

Reprenons la présentation générale d'un VAR à correction d'erreur (10)

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB^{'} \ \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t}$$

où le vecteur $\overrightarrow{z}_t$ contient k variables endogènes, B la matrice (k, c_0) des coefficients des équations de cointégration et $B^{'} \ \overrightarrow{z}_{t-1}$ le vecteur de dimension $(c_0, 1)$ dont chaque élément est une combinaison des endogènes définissant une relation de cointégration.

3.1 Variables faiblement exogène

On dit qu'une variable de $\overrightarrow{z}_t$ est faiblement exogène pour B si B n'intervient pas dans l'équation de cette variable, donc si les coefficients correspondants de A sont nuls (ce sont les coefficients de la ligne de A afin que ces variables ne soient pas expliquées par les équations de long terme). Elles ne sont expliquées que par leurs retards, mais entrent comme variables explicatives de l'équation de long terme.

3.2 Définition des MCE conditionnels

Dans cette méthode on fait *l'hypothèse* qu'une variable de $\overrightarrow{z}_t$ correspond à une équation de long terme et que les autres sont considérées comme faiblement exogènes pour le vecteur de cette équation de long terme c'est-à-dire pour B qui est un vecteur car il n'y a qu'une équation, $c_0 = 1$.

On dit qu'une variable de $\overrightarrow{z}_t$ est faiblement exogène pour B si B n'intervient pas dans l'équation de cette variable, c'est-à-dire si les coefficients correspondants de A sont nuls.

Conséquence: On essaie d'estimer par exemple la première équation de ce système correspondant à la variable y_t. Le vecteur $\overrightarrow{z}_t$ peut se décomposer en une première composante y_t et k-1 autres composantes formant le vecteur noté $\overrightarrow{h}_t$.

$$\overrightarrow{z}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \overrightarrow{h}_t \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ k-1 \end{matrix}$$

On partage alors le système (10) en deux parties, la première correspondant à une équation, la seconde aux k-1 dernières, sans oublier que, puisque ici $c_0 = 1$, alors la matrice A devient de dimension (k,1) et $B^{'}$ de dimension (1,k). Comme pour $\overrightarrow{z}_t$ on partage A en deux, un élément noté a_1 et un vecteur (k-1,1) noté $\overrightarrow{a_2}$. Le système (10) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \Delta y_t \\ \Delta \overrightarrow{h_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \overrightarrow{a_2} \end{pmatrix} B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t}$$

Pour simplifier la présentation on fait maintenant l'hypothèse que $r = 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_t \\ \Delta \overrightarrow{h_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \overrightarrow{a_2} \end{pmatrix} B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{e_t} \tag{11}$$

Ce système peut ainsi se séparer en

$$\Delta y_t = a_1 B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + m_1 + e_{1t} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{\Delta h_t} = \overrightarrow{a_2} B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + \overrightarrow{m_2} + \overrightarrow{e_{2t}} \tag{13}$$

3.3 Construction de l'équation de Δy conditionnée par Δh

Cherchons l'équation conditionnelle de Δy_t .Il faut que son erreur v_t soit indépendante de $\overrightarrow{e_{2t}}$.Pour cela on décompose e_{1t} en une partie dépendant de $\overrightarrow{e_{2t}}$ soit $\overrightarrow{\gamma}' \overrightarrow{e_{2t}}$ et une autre indépendante v_t qui est donc orthogonale à $\overrightarrow{e_{2t}}$.

$$\Delta y_t = a_1 B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + m_1 + \overrightarrow{\gamma}' \overrightarrow{e_{2t}} + v_t$$

$$\Delta y_t = a_1 B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + m_1 + \overrightarrow{\gamma}' (\overrightarrow{\Delta h_t} - \overrightarrow{a_2} B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} - \overrightarrow{m_2}) + v_t$$

De plus on a fait plus haut l'hypothèse que $\overrightarrow{\Delta h_t}$ est indépendant de B ce qui a pour conséquence que $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{0}$. Sous ces hypothèses les deux équations (12) et (13) s'écrivent

$$\Delta y_t = a_1 B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} + \overrightarrow{\gamma}' \overrightarrow{\Delta h_t} + m_1 - \overrightarrow{\gamma}' \overrightarrow{m_2} + v_t \tag{14}$$

$$\overrightarrow{\Delta h_t} = \overrightarrow{m_2} + \overrightarrow{e_{2t}}$$

Si on a réellement $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{0}$ alors l'équation (14) est suffisante pour estimer B. Pour tester la présence d'une équation de cointégration il faut tester comme dans le cas général si $B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1}$ est bien présent dans cette équation donc si on a bien $a_1 \neq 0$.

3.3.1 Présentation du test de cointégration du MCE conditionnel

$$\begin{aligned} H_0 &: a_1 = 0 \text{ il n'y a pas de relation de cointégration entre les variables} \\ H_1 &: a_1 \neq 0 \text{ il y a une relation de cointégration dons un MCE} \end{aligned}$$

Cette équation (14) est identique à la forme (10) de la méthode de Engel et Granger. Mais alors que la méthode de EG est basé sur le test du résidu de l'équation de cointégration, le MCE conditionnel est basé sur le test du coefficient a_1.Si la matrice B des coefficients de l'éventuelle relation de cointégration s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\overrightarrow{\delta} \end{pmatrix}$$

alors cette éventuelle relation de cointégration devient $B^{'} \overrightarrow{z}_{t-1} = y_{t-1} - \overrightarrow{\delta}' \overrightarrow{h}_{t-1}$. L'équation (14) s'écrit alors

$$\Delta y_t = a_1(y_{t-1} - \overrightarrow{\delta}'\overrightarrow{h}_{t-1}) + \overrightarrow{\gamma}'\overrightarrow{\Delta h_t} + l_1 + v_t$$
$$\Delta y_t = a_1 y_{t-1} - a_1\overrightarrow{\delta}'\overrightarrow{h}_{t-1} + \overrightarrow{\gamma}'\overrightarrow{\Delta h_t} + l_1 + v_t \tag{15}$$

Ainsi le test consiste à effectuer le test de nullité du coefficient de y_{t-1}.

3.3.2 Elaboration du test:

En généralisant le MCE conditionnel (15), c'est-à-dire en prenant $l > 1$ (ce nombre de retards sur $\Delta\overrightarrow{z}_t$ est celui qui permet aux erreurs v_t d'être des Bruits Blancs) et en ajoutant d'éventuelles composantes déterministes comme une constante, un trend ou un trend au carré formant le vecteur $\overrightarrow{D}_t$ on obtient

$$\Delta y_t = a_1 y_{t-1} - a_1\overrightarrow{\delta}'\overrightarrow{h}_{t-1} + \overrightarrow{\gamma}'\overrightarrow{\Delta h_t} + \sum_{i=1}^{l-1}\Gamma_{1i}\Delta\overrightarrow{z}_{t-i} + \phi_1 + \phi_2 t + \phi_3 t^2 + v_t \tag{16}$$

$$\Delta y_t = a_1 y_{t-1} - a_1\overrightarrow{\delta}'\overrightarrow{h}_{t-1} + \overrightarrow{\gamma}'\overrightarrow{\Delta h_t} + \sum_{i=1}^{l-1}\Gamma_{1i}\Delta\overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{\phi}'\overrightarrow{D}_t + v_t$$

et comme dans le cas du test de D.F. la loi du "t" de l'estimateur de a_1 est différente suivant que le modèle possède ou non une constante , un trend ou un trend au carré. Les bornes du test sont données par les tables de ERICSSON et MacKINNON notés E.MK. (Econometrics Journal 2002).

- la table 2 donne la borne κ_{nc} pour un modèle (16) avec $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$
- la table 3 donne la borne κ_c pour un modèle avec constante seule $\phi_2 = \phi_3 = 0$
- la table 4 donne la borne κ_{ct} pour un modèle avec constante et trend $\phi_3 = 0$
- la table 5 donne la borne κ_{ctt} pour un modèle avec les trois composantes déterministes.

cette borne est calculée à partir de la table $\kappa = \theta_\infty + \theta_1/T_i + \theta_2/T_i^2 + \theta_3/T_i^3$ avec T_i nombre de degrés de liberté de l'équation (16) hors les retards sur $\Delta\overrightarrow{z}_t$ soit $T_i = n-(1+k-1+k-1+d) = n-2k+1-d$ où d est le nombre de variables dans le vecteur $\overrightarrow{D}_t$ (d varie donc entre 0 et 3).

Exemple : pour un modèle avec $n = 47$ et $k = 4$ variables avec seulement un terme constant (soit $d = 1$),la valeur de T_i est $T_i = 47 - 8 + 1 - 1 = 39$, la borne au risque 0.05 est donc $\kappa_c = -3.7592 - 2.92/39 - 3.7/39^2 - 5/39^3 = -3.84$

La règle de décision est donc :

- si le "t de student" de $\widehat{a}_1$ coefficient de y_{t-1} est $t < -3.84$ on décide H_1 soit $a_1 \neq 0$, il y a bien une relation de cointégration
- si le "t de student" de $\widehat{a}_1$ coefficient de y_{t-1} est $t > -3.84$ on décide H_0 soit $a_1 = 0$, il n'y a pas de relation de cointégration

Remarque 1 : pour savoir si on prend une constante, un trend ou trend[2] ERICSSON et MacKINNON font trois tests de fisher classiques avec pour hypothèse H_1 le modèle avec les 3 variables déterministes et comme H_0 en premier $\phi_3 = 0$ puis $\phi_2 = \phi_3 = 0$ et enfin $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$

Remarque 2 : l'estimation de l'équation (16) s'effectue par les MCO.

Remarque 3 : le vecteur $\overrightarrow{h}_{t-1}$ peut parfois être complété par des variables exogènes.

3.4 Comparaison des deux techniques de E.G. et MCE conditionnel :

Ces deux méthodes sont simples à utiliser lorsque l'on a une seule équation a estimer.

Dans le modèle E.G. les coefficients de l'équation de long terme définissent une contrainte qui est supposée la même pour toutes les équations, cette hypothèse est très forte et pas toujours réaliste. Elle suppose que c_0, le nombre de relations de cointégration est ≤ 1.

Dans le MCE conditionnel pas de contraintes puisque l'on ne construit pas le modèle de long terme. Par contre, il repose sur l'hypothèse que les variables autres que y sont faiblement exogènes pour B , hypothèse que E. et MK. pensent le plus souvent valide en pratique. Elle suppose également que c_0, le nombre de relations de cointégration est ≤ 1.

Dans le cas où c_0 peut être supérieur, une autre technique existe c'est la procédure de Johansen. Elle est plus complexe que les précédentes à mettre en oeuvre, car elle traite simultanément un système de plusieurs équations, mais elle permet de tester toutes les possibilités d'un VMCE.

4 LA PROCEDURE DE JOHANSEN

4.1 Présentation:

4.1.1 Forme simple

En partant d'un VAR de la forme (2) avec k variables endogènes I(1), r retards nécessaires pour que le vecteur erreur $\overrightarrow{e_t}$ soit formé de BB.

$$\overrightarrow{z_t} = A_1 \overrightarrow{z}_{t-1} + A_2 \overrightarrow{z}_{t-2} + ... + A_r \overrightarrow{z}_{t-r} + \overrightarrow{e_t}$$

Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, ce modèle peut s'écrire sous forme d'un vecteur à correction d'erreur (10), sans oublier que si l'on ne peut trouver d'équations de long terme alors $A = 0$ matrice nulle. Cette matrice est de format (k, c_0) où $c_0$est le nombre de relations de cointégration.

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB' \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{e_t}$$

4.1.2 Forme plus générale avec des éléments déterministes, la constante et le trend:

Présentation dans laquelle l'équation de long terme peut contenir une constante (cas très courant) et un trend ainsi que l'équation de court terme. Les équations de long terme dont les résidus en $(t-1)$ dont la forme est $B' \overrightarrow{z}_{t-1}$ deviennent alors, en intégrant trend et constante $B_1' \overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-1}$ le vecteur $\overrightarrow{\tilde{z}}_t$ contenant $\overrightarrow{z}_t$, une constante ou un trend (cas peu fréquent).

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB_1^{'} \overrightarrow{\tilde{z}}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{\mu_2} + t \overrightarrow{\delta}_2 + \overrightarrow{e_t} \qquad (17)$$

avec

$$\overrightarrow{\tilde{z}}_t = \begin{pmatrix} \overrightarrow{z}_t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ \overrightarrow{\mu}_1^{'} \\ \overrightarrow{\delta}_2^{'} \end{pmatrix}$$

où les vecteurs μ sont de dimension c_0.

On peut regrouper les termes constants et dépendant du trend de cette équation (17) :

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB_1^{'} \overrightarrow{\tilde{z}}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{\mu_2} + t \overrightarrow{\delta}_2 + \overrightarrow{e_t}$$

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + A \overrightarrow{\mu}_1 + (t-1) A \overrightarrow{\delta_1} + \overrightarrow{\mu_2} + t \overrightarrow{\delta_2} + \overrightarrow{e_t}$$

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + A(\overrightarrow{\mu}_1 - \overrightarrow{\delta_1}) + \overrightarrow{\mu_2} + t(A\overrightarrow{\delta_1} + \overrightarrow{\delta}_2) + \overrightarrow{e_t}$$

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{m_0} + t \overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{e_t}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{m_0} = A(\overrightarrow{\mu}_1 - \overrightarrow{\delta}_1) + \overrightarrow{m} \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{m_1} = (A \overrightarrow{\delta}_1 + \overrightarrow{\delta}_2)$$

On se retrouve ainsi avec plusieurs cas possibles

- *cas 1* : $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\mu}_1 = \overrightarrow{\mu}_2 = \overrightarrow{0}$

Les équations de long terme et le modèle ne présentent ni trend, ni constante

- *cas 2 :* $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\mu}_2 = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme ont un terme constant $\overrightarrow{m_0} = A\overrightarrow{\mu}_1$ donc non quelconque et $\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{0}$

- *cas 3* : $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\delta}_1 = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu_2} \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme et le modèle ont un terme constant.

- *cas 4* : $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_2 \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme ont trend et constante et le modèle une constante.

- *cas 5* : tous ces vecteurs sont différents de $\overrightarrow{0}$

  Constantes et trends sont présents dans le long terme et le court terme.

Ces cas seront importants dans les tests car comme dans le cas du test de D. F. les lois dépendent de la présence ou non de trend et de constante.

4.1.3 Forme générale avec des variables exogènes dans le VAR

Pour ne pas alourdir plus la présentation, on va supposer que le VAR n'a ni constante ni trend.

Ces variables pourront être exogènes I(0) ou faiblement exogènes I(1), cela signifie dans ce dernier cas que leur écart est I(0) et qu'elles ne sont pas expliquées par les endogènes. (voir utilisation dans les modèles ECM conditionnels). Deux possibilités d'intégrer ces variables dans le modèle VAR:

- Soit elles interviennent dans les modèles de long terme. Le vecteur $\overrightarrow{z_t}$ devient alors au vecteur plus important, contenant aussi les p exogènes formant le vecteur $\overrightarrow{h_t}$, comme ci-dessus ce vecteur sera noté $\overrightarrow{\widetilde{z}_t}$ de dimension $p+k$. Le vecteur $\Delta\overrightarrow{h_t}$ est stationnaire et indépendant des z_i.

$$
\begin{aligned}
\Delta\overrightarrow{\widetilde{z}_t} &= A_1 B_1' \overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \widetilde{\Gamma}_i \Delta \overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-i} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_t} \\ \overrightarrow{v}_t \end{pmatrix} \\
\text{avec } \underset{(p+k,1)}{\overrightarrow{\widetilde{z}}_t} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{z}_t \\ \overrightarrow{h}_t \end{pmatrix} \qquad \underset{(p+k,c_0)}{B_1} = \begin{pmatrix} B \\ B_0 \end{pmatrix} \\
\underset{(p+k,c_0)}{A_1} &= \begin{pmatrix} A \\ A_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{(p+k,p+k)}{\widetilde{\Gamma}_i} = \begin{pmatrix} \Gamma_i & \Gamma_{0i} \\ \Gamma_{1i} & \Gamma_{2i} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Delta\overrightarrow{z_t} \\ \Delta\overrightarrow{h_t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \\ A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & B_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{z}_{t-1} \\ \overrightarrow{h}_{t-1} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r-1} \begin{pmatrix} \Gamma_i & \Gamma_{0i} \\ \Gamma_{1i} & \Gamma_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\overrightarrow{z_{t-i}} \\ \Delta\overrightarrow{h}_{t-i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_t} \\ \overrightarrow{v}_t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \Delta\overrightarrow{z_t} \\ \Delta\overrightarrow{h_t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(B'\overrightarrow{z}_{t-1} + B_0'\overrightarrow{h}_{t-1}) \\ A_0(B'\overrightarrow{z}_{t-1} + B_0'\overrightarrow{h}_{t-1}) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r-1} \begin{pmatrix} \Gamma_i\Delta\overrightarrow{z_{t-i}} + \Gamma_{0i}\Delta\overrightarrow{h_{t-i}} \\ \Gamma_{1i}\Delta\overrightarrow{z_{t-i}} + \Gamma_{2i}\Delta\overrightarrow{h_{t-i}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_t} \\ \overrightarrow{v}_t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi deux systèmes d'équations:

$$\Delta\overrightarrow{z_t} = A(B'\overrightarrow{z}_{t-1} + B_0'\overrightarrow{h}_{t-1}) + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i\Delta\overrightarrow{z_{t-i}} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{0i}\Delta\overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{e_t} \tag{18}$$

Ce MCE montre que les exogènes (ou faiblement exogènes) interviennent dans le long et le court terme.

Le second système faisant intervenir les seules exogènes est très simple.

$$\Delta\overrightarrow{h_t} = A_0(B'\overrightarrow{z}_{t-1} + B_0'\overrightarrow{h}_{t-1}) + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{1i}\Delta\overrightarrow{z_{t-i}} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{2i}\Delta\overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{v_t} \tag{19}$$

En effet comme les variables sont exogènes elles ne sont pas expliquées par les z_i et alors A_0 est une matrice nulle ainsi que les Γ_{1i}.

$$\Delta\overrightarrow{h_t} = \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{2i}\Delta\overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{v_t}$$

C'est la condition pour que les variables h soient considérées comme exogènes. On verra plus loin que cette propriété servira à rechercher les exogènes.

En conclusion, seul le système (18) est intéressant.

- Soit les exogènes n'interviennent que dans le court terme, sans apparaître dans les équations de long terme, cela signifie que dans (18) la matrice B_0 est nulle.

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB' \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z_{t-i}} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{0i} \Delta \overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{e_t}$$

et plus généralement

$$\Delta \overrightarrow{z_t} = AB' \overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta \overrightarrow{z_{t-i}} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{0i} \Delta \overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{m_0} + t\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{e_t}$$

4.2 Plan pour une estimation d'un VECM

4.2.1 Tester l'intégration des séries utilisées

On utilise les tests classiques d'intégration pour déterminer l'ordre d'intégration de toutes les séries introduites dans le modèle. Dans le cas présent les séries ont été supposées I(0) ou I(1). Dans un chapitre ultérieur des séries I(2) pourront être envisagées.

4.2.2 Détermination de r

Dans le modèle de base (2) on cherche le nombre optimal de retards r qui permettent aux erreurs d'être des BB. la formulation (10) indique que par construction r$\geqq$ 2,les retards> 2 ne servent qu'à obtenir un BB.

Si, on ne sait pas quelles variables sont faiblement exogènes, on les considèrent comme endogènes et on testera leur exogénéité par la suite.

- On peut utiliser les critères classiques de choix de retards, en les généralisant au cas de choix global pour un ensemble de k équations. Les critères classiques se généralisent en remplaçant la somme des carrés de résidus dans un modèle à une seule équation par le déterminant de la matrice estimée de variance-covariance Σ_e du vecteur erreur $\overrightarrow{e_t}$.

$$\overrightarrow{z_t} = A_1 \overrightarrow{z}_{t-1} + A_2 \overrightarrow{z}_{t-2} + ... + A_r \overrightarrow{z}_{t-r} + \overrightarrow{e_t}$$

  Le nombre de variables dans ce modèle simple est $k{*}r$ pour chaque équation donc $nvar = rk^2$ au total (si chaque équation a en plus k_0 variables déterministes, une équation a alors $(r*k+k_0)$ coefficients à estimer et l'ensemble$k(r*k+k_0) = nvar$). Si on a en plus de vraies variables exogènes il faut ajouter leurs nombres de coefficients à nvar.

  On note n la taille de l'échantillon utilisable. Pour touver r on va minimiser les critères suivants en choisissant le critère qui convient à la taille d'échantillon

  critère d'AKAIKE $AIC = LOG(\det \widehat{\Sigma}_e) + nvar\frac{2}{n}$ pour n<100

  critère d'HANNAN QUINN $HQ = LOG(\det \widehat{\Sigma}_e) + nvar\frac{2LOG(LOG(n))}{n}$ pour 100<n<200

  critère de SWARTZ $SC = LOG(\det \widehat{\Sigma}_e) + nvar\frac{LOG(n)}{n}$ pour n $\geq$ 200

  Pour chaque équation on trouve un ri qui minimise le critère et au final on prend pour r =max(ri) valeur commune pour toutes les équations.

- On peut également tester les contraintes linéaires.

  par exemple si on veut tester

$$\begin{aligned} H0 &: \text{ nombre de retards} = r \text{ dans chaque équation} \\ H1 &: \text{ nombre de retards } = r + r_1 \end{aligned}$$

  Sous l'hypothèse H0 les r_1 coefficients des retards dans chaque équation et pour chaque variable sont nuls. Si on a k variables, on aura pour chaque équation kr_1 contraintes et au total k^2r_1 contraintes dans le système à k équations.

  On définit la variable $Z = (n - n_0)(\ln(\det(\Sigma_0)) - \ln(\det(\Sigma_1)))$ où n est la taille de l'échantillon, n_0 le nombre de paramètres à estimer d'une équation non contrainte, Σ_0 la matrice de covariance des résidus sous l'hypothèse H0 (avec r retards) et Σ_1 la matrice de covariance des résidus sous l'hypothèse H1 (avec $r + r_1$ retards)

  Sous cette hypothèse H0 la variable Z suit un $\varkappa^2$ dont le nombre de degrés de liberté est le nombre de contraintes global dans le système soit $dl = k^2r_1$

$$\varkappa^2_{k^2r_1} = (n - n_0)(\ln(\det(\Sigma_0)) - \ln(\det(\Sigma_1)))$$

Il faut ensuite vérifier que les erreurs sont bien BB et suivent une loi Normale. On utilise les tests classiques de normalité.

4.2.3 Estimation du modèle

Estimer le modèle (10). Pour l'instant on ne connait pas la valeur de c_0 nombre de relations de cointégration. On commence donc par estimer le modèle.

$$\Delta\overrightarrow{z_t} = AB'\overrightarrow{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1}\Gamma_i\Delta\overrightarrow{z}_{t-i} + \overrightarrow{e_t}$$

par la méthode du maximum de vraisemblance(pour cela il faut bien sur connaître la loi des erreurs). On estime ainsi les matrices $A_{(k,k)}$, $B_{(k,k)}$ et les Γ_i et on note $\lambda_j \quad (j = 1, ...k)$ les valeurs propres de $\widehat{B}$.

4.2.4 Détermination de c_0 et évaluation de la présence de trend et constante

c_0 est inférieur à k, la matrice B n'est plus que de dimension c_0 et alors il y a $(k - c_0)$ valeurs propres de $\widehat{B}$ qui sont nulles . C'est ce que l'on va tester pour connaître c_0. Il existe deux tests classiques pour tester les mêmes hypothèses:

$$\begin{aligned} &\text{H0: le nombre de valeurs propres non nulles est} \quad \leq \quad c \text{ ou } \lambda_i = 0 \text{ si } i > c \\ &\text{H1: le nombre de valeurs propres non nulles est} \quad > \quad c \end{aligned}$$

Avec $c < k$

- le plus utilisé est le test de la trace

  Il utilise la statistique notée λ_{trace}

$$\lambda_{trace} = -n \sum_{i=c+1}^{k} \log(1-\widehat{\lambda}_i) \text{ calculée pour } c \text{ allant de 0 à } k-1$$

- Le second est le test de la valeur propre maximum.

  Il utilise la statistique notée $\lambda_{\max}$

$$\lambda_{\max} = -nLOG(1-\widehat{\lambda}_{c+1}) \text{ calculée pour } c \text{ allant de 0 à } k-1$$

- chacun de ces tests fournit k valeurs qui seront comparées aux bornes des tests. Comme dans le cas des tests de D. et F., les lois de probabilité et donc les bornes des tests dépendent des différents cas de présence ou non de trend et de constante (29) . Ils dépendent également de la présence ou non de variables exogènes (ou faiblement exogènes) dans les équations de long terme (4.1.3).

Dans le cas où il n'y a pas de variables exogènes on peut utiliser les tables de Johansen et Nielsen (1993) pour le premier test.

Dans tous les cas on peut utiliser les tables de MacKinnon, Haug et Michelis (Journal of Applied Economitrics Vol14 N°5 1999).

- On commence à tester $c = 0$ dans le cas le plus contraint c'est-à-dire cas1 de (4.1.2), puis cas 2 à 5.et on poursuit avec $c = 1$ ..... jusqu'au moment où la décision passe de H1 à H0 , qui nous donnera ainsi le rang c_0 de B et la présence ou non de trend et de constante suivant le cas d'arrêt. On peut aussi regarder si les équations de LT présenent ou non pour certaines des trends ou des constantes.

4.2.5 Recherche d'éventuelles variables faiblement exogènes

Le problème a déjà été soulevé dans la partie (4.1.3), où il a été démontré que si des variables sont faiblement exogènes alors la partie de la matrice A qui leur correspond est nulle.

Prenons l'exemple de $\overrightarrow{\widetilde{z}}_t$ formé de k variables

$$\Delta\overrightarrow{\widetilde{z}_t} = A_1 B_1^{'} \overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-1} + \sum_{i=1}^{r-1} \widetilde{\Gamma}_i \Delta \overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-i} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_t} \\ \overrightarrow{v}_t \end{pmatrix}$$

et supposons que la dernière variable de $\overrightarrow{\widetilde{z}}_t$ soit faiblement exogène , elle ne peut donc pas être expliquée par $\overrightarrow{\widetilde{z}}_{t-1}$ ce qui entraîne que la dernière ligne de A_1 doit être nulle. C'est ainsi que l'on testera la présence d'éventuelles variables faiblement exogènes. Une fois vérifié cette exogénéité la variable sera donc considérée comme non endogène et son équation sera supprimée. on passera ainsi d'un VAR (k) à un VAR $(k-1)$.Elle ne sera plus présente dans $\overrightarrow{z}_t$ qui ne contiendra que $k-1$ variables, mais pourra bien toujours expliquer l'équation de long terme en entrant dans $\overrightarrow{h}_t$ si elle joue un rôle dans le long terme. Le nouveau modèle sera celui vu dans la partie (4.1.3) et plus précisément dans le modèle(18).

$$\Delta\overrightarrow{z_t} = A(B^{'}\overrightarrow{z}_{t-1} + B_0^{'}\overrightarrow{h}_{t-1}) + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_i \Delta\overrightarrow{z_{t-i}} + \sum_{i=1}^{r-1} \Gamma_{0i} \Delta\overrightarrow{h_{t-i}} + \overrightarrow{e_t}$$

- Pour tester si une variable est faiblement exogène, il faut donc tester si la ligne correspondante de la matrice A_1 est nulle. Si l'on se trouve dans un modèle ayant k équations et de rang c_0 , la ligne de A possède c_0 coefficients qui doivent être nuls

  $$H0 : \alpha_{ij} = 0 \text{ pour j=1 à } c_0$$

  Ce test de c_0 contraintes linéaires est sous l'hypothèse H0 un test du $\varkappa^2(c_0)$.

5 Application utilisant le programme CATS du logiciel RATS

Nous allons travailler sur la consommation des ménages aux USA.

5.1 Présentation de CATS

L'étude va se faire en présentant CATS sous-programme de RATS qui estime les VECM à l'aide de la procédure de Johansen.

1. Estimation de base du système

   Elle s'effectue par la méthode du maximum de vraisemblance sous hypothèse de normalité des erreurs. Appel du sous-programme CATS:

   SOURCE CATSMAIN.SRC

   @CATS(OPTIONS) START END

   # liste des variables endogènes

   # liste des exogènes ou des variables faiblement exogènes (avec l'option EXO)

   # liste des variables dummies (avec l'option DUM)

   Liste des options :

   LAGS = nombre de retards l du VAR . la valeur par défaut si on ne prend pas l'option LAGS esr $l = 2$

   DETTREND = *NONE/CIMEAN/CIDRIFT/*[*DRIFT*]

   Cette option reprend le cas où des constantes ou trends sont inclus dans les équations de cointégration ou dans le modèle de base , voir (17)

   NONE indique que l'on ne prend de constante ni dans les équations de cointégration (donc pas d'unité dans $\overrightarrow{\overrightarrow{z}}_{t-1}$) , ni dans l'équation de base (donc $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{0}$)

   CIMEAN indique que l'on prend une constante seulement dans les équations de cointégration (donc $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{0}$)

   CIDRIFT met un trend dans les équations de cointégration ($\overrightarrow{\overrightarrow{z}}_{t-1}$ contient le trend) ainsi que dans le modèle de base ($\overrightarrow{m}_2 \neq \overrightarrow{0}$)

   DRIFT c'est l'option prise si l'on n'indique rien comme option. Il y a une constante seulement dans le modèle de base ($\overrightarrow{m} \neq \overrightarrow{0}$)

   SEASON = nombre s de coefficients saisonniers. Le logiciel met $s - 1$ dummies saisonnières dans le modèle. Si cette option n'est pas prise par défaut $s = 0$.

   PROC = *RANK/TSPROP/*[*I*1]

RANK est utilisé pour tester le nombre de relations de cointégration

TSPROP permet de tester la satationnarité, l'exogénéité et la présence dans les équations de long terme de chaque variable du modèle

I1 permet ensuite de connaitre les propriétés des erreurs du modèle et d'effectuer des tests de contraintes linéaires sur les coefficients.

EXO:/ [**NOEXO**] indique la présence ou non d'une liste de variables exogènes ou faiblement exogènes entrant dans les équations de long terme en niveau et dans les équations de court terme en écart. Cette liste si elle existe devra être indiquée après la liste des endogènes.

DUM / [**NODUM**] indique la présence ou non d'une liste de variables exogènes présentes seulement dans l'équation de court terme autres que la constante, un trend ou des variables saisonnières qui auront un traitement spécifique. Si des listes EXO et DUM sont présentes ensembles, RATS prend la première liste comme EXO et la seconde comme DUM.

TABLES / [**NOTABLES**] permet de donner les bornes des tests sur les valeurs propres au risque 10% dans le cas ou des exogènes ou dummies ont été introduites, car dans ce cas les bornes sont différentes du cas clasique sans EXO ni DUM (dans ce cas classique les bornes sont fournies directement)

REC / [**NOREC**] permet d'inclure la procédure d'analyse récursive du modèle.

GNAME=' un nom quelconque ' permet de sauvegarder les graphiques de l'étude. Par exemple GNAME='gra' permet à RATS de mettre lepremier graphique dans gra1.rgf, le second dans gra2.rgf ....

BATCH / [**NOBATCH**] permet le choix entre le mode batch et le mode intéractif.

Pour effectuer une présentation plus détaillée, nous allons utiliser l'exemple fourni dans le mode d'emploi de CATS

5.2 Etude du nombre de retards sur les variables

On construit l'équation de CM en fonction des autres variables et on cheche le nombre de retards sur ces variavles et sur l'endogène (voir le chapitre sur les modèles autorégressifs et à retards échelonnés), on trouve le nombre de retards max = 4. On fait la même chose avec pour endogène RD, puis avec TCHO, ... On trouve au final un retard maximum de r=4; C'est ce résultat que l'on va intégrer dans le VAR.

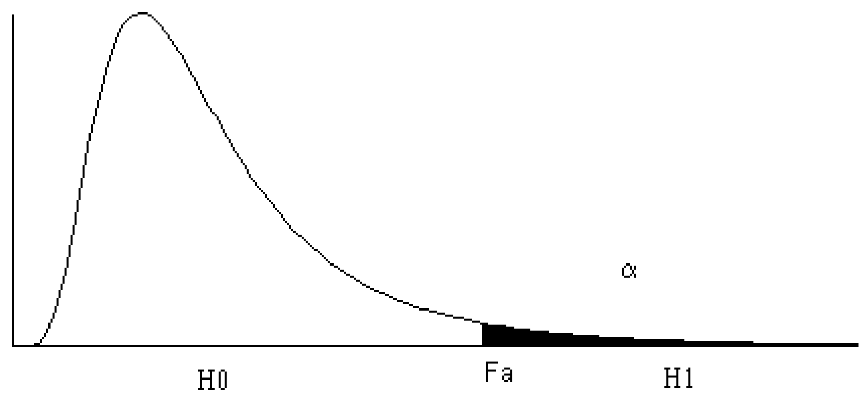
5.3 Recherche du nombre d'équations de long terme

Si c_0 est inférieur à k la matrice B n'est plus que de dimension c_0 et alors il y a $(k - c_0)$ valeurs propres de $\widehat{B}$ qui sont nulles . C'est ce que l'on va tester pour connaître c_0.

$$\begin{array}{lcl} \text{H0: le nombre de valeurs propres non nulles est} & \leq & c \text{ ou } \lambda_i = 0 \text{ si } i > c \\ \text{H1: le nombre de valeurs propres non nulles est} & > & c \end{array}$$

Avec $c < k$

On va utiliser le test de la trace



$$\lambda_{trace} = -n \sum_{i=c+1}^{k} \log(1 - \widehat{\lambda}_i) \text{ calculée pour } r \text{ allant de 0 à } \ k-1$$

Sous l'hypothèse H0 la loi est tabulée et les tables de MacKinnon, Haug et Michelis (Journal of Applied Economitrics Vol14 N°5 1999) donnent la borne du test sous les différentes contraintes de présence de constante ou de trend.

On commence à tester $c = 0$ dans le cas le plus contraint c'est-à-dire cas1 de (4.1.2), puis cas 2 à 5.et on poursuit avec $c = 1$ ..... jusqu'au moment où la décision passe de H1 à H0 , qui nous donnera ainsi le rang c_0 de B et la présence ou non de trend et de constante suivant le cas d'arrêt.

5.3.1 Résultats de CATS

- *cas 1* : $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\mu}_1 = \overrightarrow{\mu}_2 = \overrightarrow{0}$

Les équations de long terme et le modèle ne présentent ni trend, ni constante

```
I(1)-ANALYSIS
 p-r  r Eig.Value   Trace  Trace* Frac95 P-Value P-Value*
  5   0     0.185 100.671 72.006 59.961   0.000    0.003
  4   1     0.108  57.613 25.781 40.095   0.000    0.605
  3   2     0.093  33.428  8.948 24.214   0.002    0.906
  2   3     0.051  12.786    .NA  12.282   0.041      .NA
  1   4     0.009   1.829    .NA   4.071   0.207      .NA
```

- *cas 2* : $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\mu}_2 = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme ont un terme constant $\overrightarrow{m_0} = A\overrightarrow{\mu}_1$ donc non quelconque et $\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{0}$

```
I(1)-ANALYSIS
 p-r  r Eig.Value   Trace  Trace* Frac95 P-Value P-Value*
  5   0     0.216 120.399 86.318 76.813   0.000    0.007
  4   1     0.117  69.148 44.118 53.945   0.001    0.287
```

3	2	0.106	42.778	.NA	35.070	0.005	.NA
2	3	0.068	19.194	.NA	20.164	0.069	.NA
1	4	0.020	4.293	.NA	9.142	0.382	.NA

- *cas 3* : $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\delta}_1 = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu_2} \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme et le modèle ont un terme constant.

I(1)-ANALYSIS

p-r	r	Eig.Value	Trace	Trace*	Frac95	P-Value	P-Value*
5	0	0.194	103.162	87.330	69.611	0.000	0.001
4	1	0.106	57.647	49.860	47.707	0.004	0.030
3	2	0.088	34.001	29.744	29.804	0.015	0.051
2	3	0.048	14.590	12.538	15.408	0.067	0.134
1	4	0.020	4.287	.NA	3.841	0.038	.NA

- *cas 4* : $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_1 \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\delta_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mu}_2 \neq \overrightarrow{0}$

  Les équations de long terme ont trend et constante et le modèle une constante.

I(1)-ANALYSIS

p-r	r	Eig.Value	Trace	Trace*	Frac95	P-Value	P-Value*
5	0	0.197	112.811	95.498	88.554	0.000	0.014
4	1	0.118	66.424	57.388	63.659	0.028	0.155
3	2	0.098	39.894	34.148	42.770	0.096	0.286
2	3	0.062	18.034	15.247	25.731	0.349	0.561
1	4	0.021	4.467	3.529	12.448	0.677	0.803

5.3.2 Etude du test

On s'arrêtera dans l'étude quand on décidéra pour le première fois H0

- test de c=0 (Cats note k$\rightarrow p$ et c$\rightarrow r$)

  dans le cas 1 la trace=100.671 nettement supérieure à Fα =59.961 on décide donc H1 (la trace* est utilisée dans le cas des petits échantillons ce qui n'est pas notre cas)

  dans le cas 2 la trace = 120.399 nettement supérieure à Fα =76.813 on décide donc H1

  dans le cas 3 la trace =103.162 nettement supérieure à Fα =69.611 on décide donc H1

  dans le cas 4 la trace =112.811 nettement supérieure à Fα =88.554 on décide donc H1

  CATS ne donne pas les résultats pour le dernier cas

  Conclusion : tous les cas donnent la même décision H1

- test de c=1

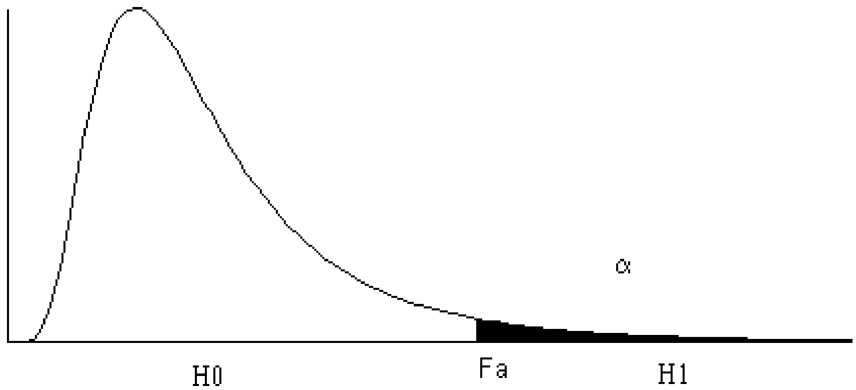
  dans le cas 1 la trace=57.613 nettement supérieure à Fα =40.095 on décide donc H1

  dans le cas 2 la trace = 69.148 nettement supérieure à Fα =53.945 on décide donc H1

  dans le cas 3 la trace =57.647 nettement supérieure à Fα =47.707 on décide donc H1

  dans le cas 4 la trace =66.424 supérieure à Fα =63.659 on décide donc H1

  Conclusion : tous les cas donnent la même décision H1



- test de c=2

  dans le cas 1 la trace= 33.428 supérieure à Fα =24.214 on décide donc H1

  dans le cas 2 la trace = 42.778 supérieure à Fα =35.070 on décide donc H1

dans le cas 3 la trace =34.001 supérieure à Fα =29.804 on décide donc H1

dans le cas 4 la trace = 39.894 supérieure à Fα =42.770 on décide donc H0 et nous arrêtons le test

- **Conclusion** : nous sommes dans le cas 4 les équations de long terme ont trend et constante et le modèle une constante et il y a $c_0 = 2$ équations de long terme.

5.4 Recherche de variables faiblement exogènes

5.4.1 Rappel du test

Pour tester si une variable est faiblement exogène, il faut donc tester si la ligne correspondante de la matrice A_1 est nulle.

- $$H0 : \alpha_{ij} = 0 \text{ pour j=1 à } c_0$$

  Ce test de $c_0 = 2$ contraintes linéaires est sous l'hypothèse H0 un test du $\varkappa^2(c_0 = 2)$.

5.4.2 Résultats de CATS

```
TEST OF WEAK EXOGENEITY
LR-Test, Chi-Square(r), P-values in brackets.

 r  DGF  5% C.V.   CM      RD      TCHO     INF     SP

 2   2    5.991  10.758  11.543  12.524   3.517   1.440
                [0.010] [0.005] [0.002] [0.172] [0.487]
```

5.4.3 Conclusions du test

Deux variables ont un χ^2_2 supérieur à la borne F$\alpha = 5.991$. Il s'agit des INF et SP ce qui est un peu normal économiquement, elles peuvent par exemple expliquer CM mais CM ne peut les expliquer.

Ce seront donc nos deux variables faiblement exogènes.

5.5 Résultats finaux

5.5.1 Coefficients des éléments de long termes

```
THE MATRICES BASED ON 2 COINTEGRATING VECTORS:

Matrice B(transposed)
          CM     RD    TCHO     INF      SP   TREND
Beta(1)  1.000 -0.829 13.291  1174.418 -0.474 -1.304
Beta(2) -0.976  1.000  3.898 -6027.323  0.147 -3.673

Matrice A
      Alpha(1) Alpha(2)
DCM    -0.046    0.034
      (-1.632)  (1.214)
DRD     0.088   -0.173
        (1.888) (-3.695)
DTCHO  -0.002   -0.001
      (-4.738) (-1.835)
DINF    0.000    0.000
        (0.813)  (2.186)
DSP     0.042    0.015
        (1.297)  (0.451)

Matrice AB'
         CM         RD      TCHO       INF        SP     TREND
DCM    -0.080    0.073   -0.477  -261.481    0.027   -0.066
      (-2.015)  (1.974) (-1.222)  (-1.502)  (1.919) (-0.601)
DRD     0.257   -0.246    0.494  1148.029   -0.067    0.522
        (3.936) (-4.052)  (0.765)   (3.986) (-2.902)  (2.856)
DTCHO  -0.001    0.001   -0.029     2.294    0.001    0.005
      (-2.095)  (1.596) (-5.063)   (0.900)  (3.977)  (3.307)
DINF   -0.000    0.000    0.000    -0.066   -0.000   -0.000
      (-0.951)  (1.170)  (1.398)  (-1.992) (-0.126) (-2.332)
DSP     0.028   -0.020    0.616   -39.250   -0.018   -0.109
        (0.610) (-0.477)  (1.371)  (-0.196) (-1.104) (-0.856)
```

5.5.2 Coefficients des résultats de court terme

```
THE SHORT-RUN MATRICES:
```

LAGGED DIFFERENCES:

GAMMA(1)

	DCM{1}	DRD{1}	DTCHO{1}	DINF{1}	DSP{1}
DCM	0.109	-0.009	-0.645	-1202.980	0.044
	(1.445)	(-0.188)	(-0.130)	(-3.160)	(0.741)
DRD	0.475	-0.210	2.169	-2472.827	0.200
	(3.822)	(-2.598)	(0.264)	(-3.927)	(2.051)
DTCHO	-0.003	-0.000	0.517	1.689	-0.002
	(-2.688)	(-0.682)	(7.121)	(0.303)	(-1.896)
DINF	0.000	0.000	-0.002	-0.328	0.000
	(0.617)	(0.101)	(-1.707)	(-4.521)	(0.200)
DSP	-0.053	-0.062	-2.901	-406.824	0.451
	(-0.614)	(-1.096)	(-0.508)	(-0.928)	(6.634)

GAMMA(2)

	DCM{2}	DRD{2}	DTCHO{2}	DINF{2}	DSP{2}
DCM	0.268	-0.031	6.332	-545.748	0.039
	(3.514)	(-0.637)	(1.124)	(-1.376)	(0.534)
DRD	0.262	0.090	7.845	-883.010	-0.169
	(2.079)	(1.116)	(0.842)	(-1.346)	(-1.407)
DTCHO	-0.000	-0.000	-0.073	-5.929	-0.001
	(-0.371)	(-0.651)	(-0.883)	(-1.021)	(-0.501)
DINF	0.000	0.000	-0.001	-0.098	-0.000
	(1.924)	(1.023)	(-0.467)	(-1.300)	(-0.594)
DSP	0.089	-0.041	9.178	-290.860	-0.133
	(1.011)	(-0.735)	(1.416)	(-0.637)	(-1.591)

GAMMA(3)

	DCM{3}	DRD{3}	DTCHO{3}	DINF{3}	DSP{3}
DCM	0.466	-0.108	4.686	-894.654	-0.020
	(6.151)	(-2.468)	(1.055)	(-2.473)	(-0.299)
DRD	0.255	0.006	-4.576	-998.635	0.036
	(2.037)	(0.084)	(-0.623)	(-1.669)	(0.321)
DTCHO	-0.002	-0.000	-0.165	4.512	-0.001
	(-2.056)	(-0.622)	(-2.543)	(0.853)	(-1.381)
DINF	-0.000	0.000	0.001	0.134	0.000
	(-1.552)	(0.908)	(0.974)	(1.948)	(0.494)
DSP	-0.013	0.072	-6.253	-297.395	0.485
	(-0.147)	(1.436)	(-1.223)	(-0.714)	(6.227)

CONSTANT

DCM	10.172
	(2.192)
DRD	6.054
	(0.789)
DTCHO	0.359
	(5.293)
DINF	-0.002

	(-1.802)
DSP	-2.592
	(-0.485)