

TESTS D'AUTOCORRELATION

Nous allons étudier le cas où l'hypothèse de non autocorrélation des erreurs n'est plus vérifiée. Nous avons donc maintenant un modèle avec

$$COV(\epsilon_t, \epsilon_{t'}) \neq 0 \quad t \neq t'$$

Ce cas n'a d'intérêt que dans les modèles où les données sont classées, c'est-à-dire où t et t' ont des significations économiques, soit parce que les données sont des chroniques et alors le classement est le temps, soit parce que on a créé, pour des données non chronologiques, un ordre ayant une signification économique. Après avoir présenté les tests les plus classiques, nous montrerons que l'autocorrélation est souvent due à des problèmes qu'il est préférable de régler directement plutôt que de traiter l'autocorrélation, cette partie est très importante en pratique..

Les erreurs en t sont donc fonction des erreurs en $t-1, \dots, t-r$ sous une forme $\epsilon_t = F(\epsilon_{t-1} \dots \epsilon_{t-r})$. cette fonction F est en général inconnue, on va faire l'approximation suivante valable si n est assez grand (voir les modèles autorégressifs)

$$\epsilon_t = \rho_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \rho_r \epsilon_{t-r} + u_t$$

Les ρ_i sont des constantes inconnues. Les u_t sont des Bruits Blancs, c'est-à-dire que ce sont des erreurs telles que $E(u_t)=0$, la variance des u_t est la constante inconnue σ_u^2 , ils sont donc homoscedastiques et $cov(u_t, u_{t'}) = 0$ cela pour tous t .

Si $\epsilon_t = \rho_1 \epsilon_{t-1} + u_t$ on parlera d'autocorrélation d'ordre 1 notée AR(1).

Si $\epsilon_t = \rho_1 \epsilon_{t-1} + \rho_2 \epsilon_{t-2} + \rho_3 \epsilon_{t-3} + \rho_4 \epsilon_{t-4} + u_t$ on parlera d'autocorrélation d'ordre 4 notée AR(4).

Nous allons tout d'abord présenter les tests et donner des exemples, avec ces exemples on indiquera les lignes de programmation RATS qui donneront les résultats de ces test.

Pour faire les tests vous aurez deux possibilités:

- Soit faire chaque test séparément en recopiant les lignes RATS pour chaque test et en l'adaptant à votre modèle.
- Soit utiliser la procédure AUTOCOR.SRC qui vous donnera directement les tests les plus importants.

1 Tests d'autocorrélation d'ordre 1 classiques

$$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$$

Dans ce cas d'autocorrélation d'ordre 1, le modèle ne doit pas être explosif, il faut donc avoir la contrainte $|\rho| < 1$. On traitera dans ce chapitre l'inégalité stricte, la possibilité d'avoir $\rho = 1$ se trouvera dans les modèles intégrés (voir chapitre sur l'intégration des séries).

Le test le plus courant est le test de DURBIN et WATSON.

1.1 Test de DURBIN ET WATSON

CE TEST NE S'UTILISE QUE DANS LES MODELES NON AUTOREGRESSIFS. Le cas des modèles autorégressifs sera vu dans le paragraphe 1.2 sur le test de DURBIN. Ils se sont basés pour construire leur test sur la statistique de Von Neumann.

1.1.1 Statistique de Von Neumann

Von Neumann a testé le cas suivant: prenons une variable $z_t = \rho z_{t-1} + u_t$ où u est un bruit blanc

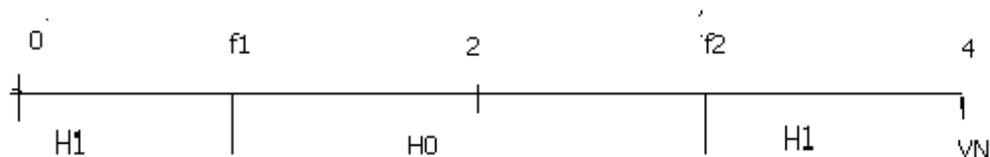
H0 : il y a non autocorrélation $\iff \rho = 0$

H1 : il y a autocorrélation $\iff \rho \neq 0$ avec toujours $|\rho| < 1$

Von Neumann a montré que sous l'hypothèse H0 la statistique

$$VN = \frac{\sum_{t=2}^n (z_t - z_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2}$$

suit asymptotiquement une loi Normale $N(2, 4/n)$



Cette statistique est comprise entre 0 et 4 car la loi est symétrique avec une espérance égale à 2 et de plus VN est positif, les bornes du test sont f1 et f2, si VN est entre f1 et f2 on décide H0 il y a non autocorrélation des z , si VN est $< f1$ ou $VN > f2$ on décide H1.

Malheureusement, Durbin et Watson n'ont pu utiliser ce résultat très facile à réaliser, nous allons voir pourquoi (quel suspense !!)

1.1.2 Statistique de Durbin-Watson

Nous commençons par utiliser Von Neumann avec le test d'autocorrélation d'ordre 1 sur les erreurs du modèle.

$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$ où u_t est un bruit blanc et $|\rho| < 1$

H0 : il y a non autocorrélation d'ordre 1 des erreurs $\iff \rho = 0$

H1 : il y a autocorrélation $\iff \rho \neq 0$ avec toujours $|\rho| < 1$

Si on applique Von Neumann on aura

$$VN = \frac{\sum_{t=2}^n (\epsilon_t - \epsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (\epsilon_t - \bar{\epsilon})^2}$$

Mais cette statistique n'est pas utilisable car les erreurs ϵ_t sont inconnues. Elles vont être remplacées par les résidus e_t et c'est là que les ennuis commencent pour nos deux compères. Ils construisent donc leur statistique

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (e_t - \bar{e})^2}$$

En fait ils font l'hypothèse que $\bar{e} = 0$ c'est-à-dire comme on l'a vu dans le premier chapitre que le modèle a un terme constant, donc

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (e_t)^2}$$

et là ils constatent que si H_0 est vrai, les erreurs sont non autocorrélées, mais les résidus restent autocorrélés (voir le cours sur les propriétés des résidus dans le chapitre 2). On a montré que si la matrice de variances-covariances des erreurs $V_{\epsilon} = \sigma^2 I_n$ alors celle des résidus est $V_{\bar{e}} = \sigma^2 (I_n - X(X'X)^{-1}X')$, il y a donc autocorrélation des résidus, alors la loi de DW sous l'hypothèse H_0 n'est plus hélas asymptotiquement une loi Normale mais une loi complexe qui dépend de n , de k et de la matrice X , cette loi change donc pour chaque échantillon ce qui n'est pas très pratique reconnaissons-le. Le travail de Durbin et Watson a consisté à montrer que cette loi de DW sous H_0 peut être encadrée par deux lois qui elles ne dépendent que de n et de k . Cela semble une excellente idée mais nous verrons que cela conduit à quelques soucis. Avant de voir la construction même du test nous allons donner quelques propriétés de DW

1.1.3 Propriétés de la statistique DW

- Estimation de ρ : on a $\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + u_t$ mais ce modèle ne permet pas d'estimer ρ car les erreurs sont inconnues. On va donc les remplacer par les résidus et construire le modèle $e_t = \rho e_{t-1} + u'_t$, si on fait les MCO sur ce modèle on obtient une estimation de ρ

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n (e_{t-1})^2}$$

Cette estimation n'est pas géniale car bien sur on a remplacé les erreurs par les résidus.

- Décomposition de DW. La statistique DW peut s'écrire:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (e_t)^2} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t^2 + \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n (e_t)^2}$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} - 2 \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Les résidus étant en général faibles (sauf dans le cas de points aberrants), on va faire les approximations suivantes: $\sum_{t=2}^n e_t^2 \simeq \sum_{t=1}^n e_t^2 \simeq \sum_{t=1}^n e_t^2 \simeq \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2$ ce qui va conduire à l'approximation suivante

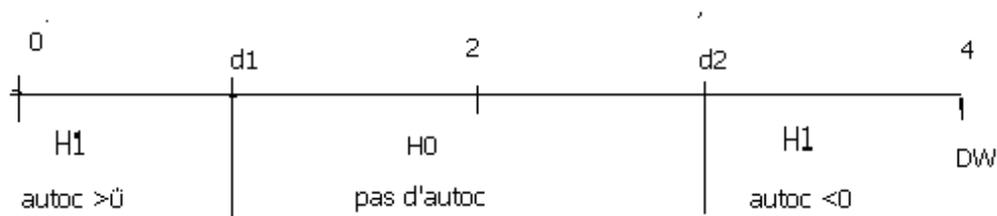
$$DW \simeq 1 + 1 - 2\hat{\rho} \text{ soit } DW \simeq 2(1 - \hat{\rho})$$

- Conséquences pour les valeurs prises par DW: ρ étant compris entre -1 et +1
 Si $\rho \rightarrow 1$ alors $\hat{\rho} \rightarrow 1$ et donc $DW \rightarrow 0$ il y a alors forte autocorrélation positive des erreurs
 Si $\rho \rightarrow 0$ alors $\hat{\rho} \rightarrow 0$ et donc $DW \rightarrow 2$ il y a alors non autocorrélation des erreurs
 Si $\rho \rightarrow -1$ alors $\hat{\rho} \rightarrow -1$ et donc $DW \rightarrow 4$ il y a alors forte autocorrélation négative des erreurs
 On constate ainsi que DW varie entre 0 et 4 et que DW est "bon" (c'est-à-dire non autocorrélation) si DW est proche de 2.

1.1.4 Construction de l'intervalle de confiance pour le test de DW

Les valeurs d1 et d2 sont les bornes du test pour cette fameuse loi inconnue, ces valeurs ne seraient donc calculables comme on l'a dit plus haut que sur chaque échantillon car la loi dépend de la matrice X.

- Intervalle de confiance si on connaissait la vrai loi de probabilité:



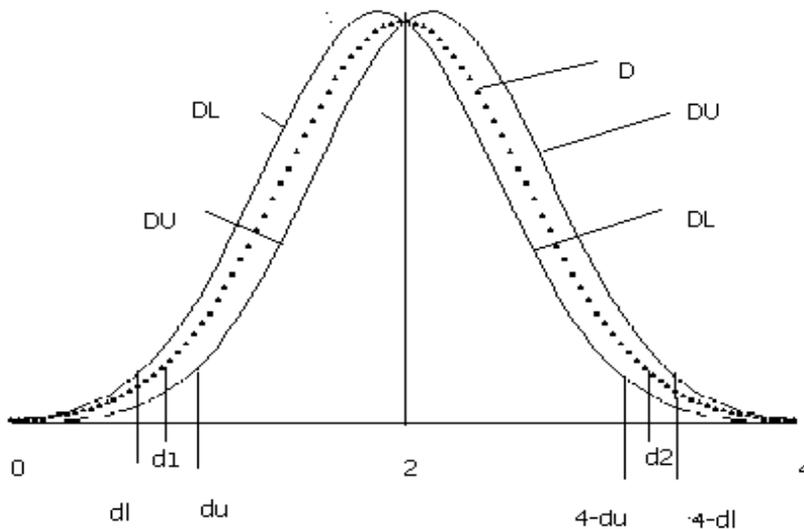
Comme vu plus haut Durbin et Watson ont encadré cette loi par deux lois qu'ils ont tabulées, ces lois ne dépendant que de la taille de l'échantillon n et du nombre k de variables explicatives ce qui correspond au graphique suivant

- Lois de probabilités définies par Durbin et Watson, elles ne dépendent que de n et k et encadrent la vrai loi inconnue:

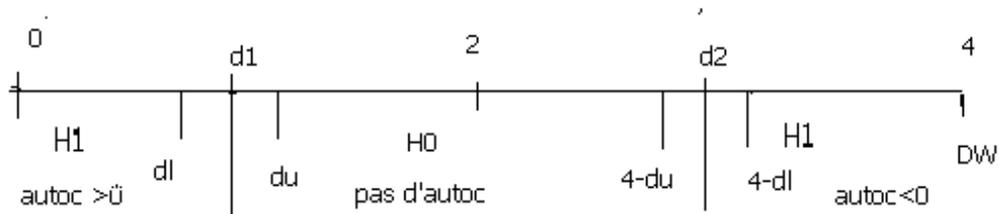
On note D la vrai loi de probabilité elle est ici en pointillés, Elle est encadrées par les deux lois de Durbin et Watson qui sont notées DL et DU.

A gauche au risque 5% on a la vraie valeur de la borne d_1 , au même risque c'est-à-dire avec la même surface de 5% on a d_1 correspondant à la loi D_1 (comme la loi est au-dessus de D le point d_1 est à gauche de d). De même la courbe DU étant en dessous de D pour la même surface de 5% on a le point du qui ne peut être qu'à droite de d_1 . Par raison de symétrie par rapport à 2 on trouvera les bornes d_2 et les deux valeurs qui l'encadrent $4-du$ et $4-d_1$.

Le graphe des courbes est présenté ici simplifié (il n'y a pas de symétrie exacte par rapport à 2)



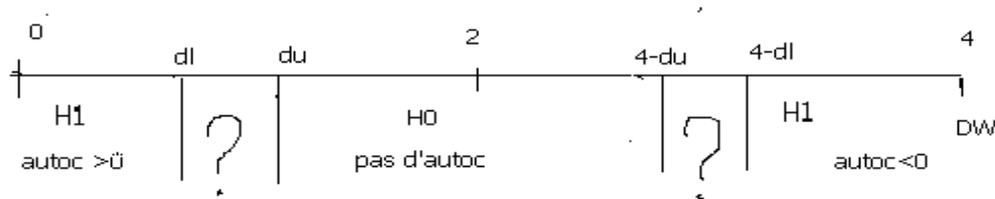
- Intervalle de confiance défini par Durbin et Watson. On se trouve donc dans l'intervalle de confiance précédent avec d_1 et d_2 inconnus et les valeurs d_1 et du fournies par les tables de Durbin et Watson. On obtient ainsi :



1. Si la statistique DW est $< d_1$ nous avons vu que la décision était H_1 : autocorrélation d'ordre 1 positive, mais d_1 est inconnu par contre d_1 étant connu on peut en déduire que si DW est $< d_1$ alors on déduit H_1 : autocorrélation d'ordre 1 positive.

- Entre d_1 et d_2 on déduit pas d'autocorrélation d'ordre 1, ces valeurs étant inconnues on va seulement déduire qu'entre les valeurs connues d_1 et $4-d_1$ on décidera H_0 : pas d'autocorrélation d'ordre 1
- Si la statistique DW est $>d_2$ nous avons décidé H_1 : autocorrélation d'ordre 1 négative. La valeur d_2 étant inconnue nous pouvons seulement déduire que si DW est $>4-d_1$ alors on prend la décision H_1 : autocorrélation d'ordre 1 négative
- Cette construction conduit hélas à la conclusion suivante: si DW se trouve soit entre d_1 et d_2 , soit entre $4-d_2$ et $4-d_1$ nous ne pouvons prendre aucune décision, c'est ce que l'on va appeler les zones d'incertitude.

Ces remarques nous permettent de construire l'intervalle de confiance utilisable:



- Lecture sur les tables de Durbin et Watson. Ils ont fourni des tables pour une taille d'échantillon comprise entre 15 et 100. Si n est inférieur à 15 les approximations qu'ils ont faites ne leur permettent pas de calculer correctement les bornes et si n est >100 d'autres tests asymptotiques peuvent remplacer leur test (voir plus loin). Le nombre de variables explicatives n'est pas k mais $k'=k-1$ car ils n'ont pas tenu compte dans la liste des variables explicatives de la constante parce qu'ils ont construit leur test pour un **modèle contenant toujours un terme constant**. Ils ont proposé deux valeurs du risque α ce qui donne deux tables, l'une pour un risque unilatéral de 5% l'autre de 1%, ils ont donné les valeurs de d_1 et d_2 ce qui permet de faire le test unilatéral entre 0 et 2, si DW est supérieur à 2 à nous de calculer $4-d_2$ et $4-d_1$ pour faire le test entre 2 et 4.

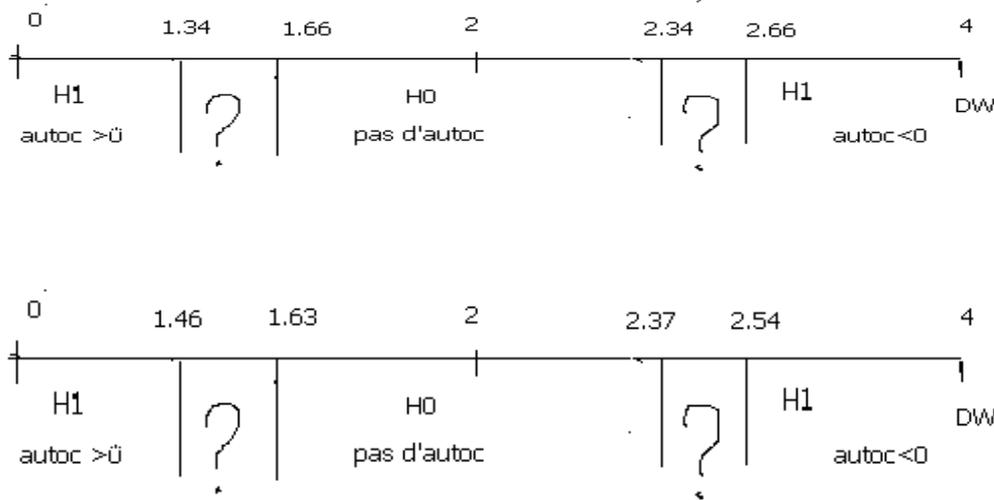
POUR CE TEST PAS DE PROGRAMMATION RATS LE DONNE TOUJOURS, attention même dans les cas où il ne doit pas être utilisé.

Exemple 1: supposons que dans un échantillon de taille $n=40$ avec $k=4$ variables explicatives (dont toujours la constante) on calcule le $DW=1.70$, les tables pour 5% nous donnent pour $n=40$ et $k'=3$ les valeurs $d_1=1.34$ et $d_2=1.66$, l'intervalle de confiance donne le résultat suivant: Décision H_0 : pas d'autocorrélation des erreurs

Exemple 2: on a un échantillon de taille $n=50$ avec $k=3$ variables explicatives (dont toujours la constante)

on calcule le $DW=2.43$, les tables pour 5% nous donnent pour $n=50$ et $k'=2$ les valeurs $d_1=1.46$ et $d_2=1.63$, l'intervalle de confiance devient:

Nous nous trouvons donc dans la zone d'incertitude et le test ne peut donner une conclusion. Dans ces cas on fait "comme s'il y avait autocorrélation" on la traite et l'on



voit ensuite si on a eu ou non raison de traiter donc s'il y a ou non autocorrélation. Ce cas sera étudié quand on parlera des moindres carrés généralisés.

1.1.5 Les conditions d'utilisation du test de Durbin et Watson

Plusieurs conditions sont nécessaires pour utiliser ce test.

1. Il faut un ordre dans les séries comme on l'a dit au début
2. Il faut un terme constant dans le modèle
3. Il est construit pour $15 < n < 100$ (si $n > 100$ voir plus bas)
4. Il ne peut s'utiliser dans les modèles autorégressifs et sera dans ce cas remplacé par le test de Durbin

1.2 Le test de DURBIN

Ce test est utilisé dans le cas des **modèles autorégressifs** (où la variable endogène est expliquée par ses décalages dans le temps) et seulement dans ce cas.

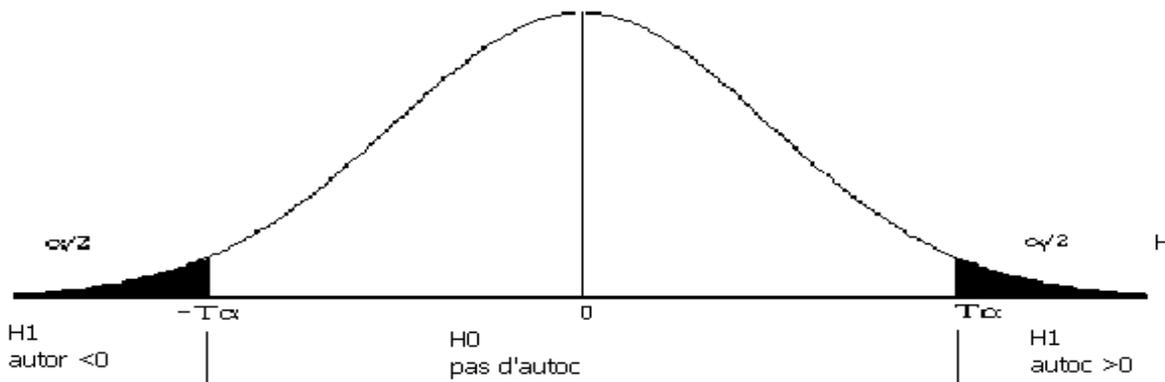
Dans le cas des modèles autorégressifs, comme nous le verrons dans le chapitre consacré à ces modèles dits dynamiques, le test de Durbin-Watson est biaisé et asymptotiquement biaisé. Il n'est donc plus utilisable et a été remplacé par Durbin par le test suivant :

Durbin a construit la statistique notée H

$$H = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{n} - \widehat{Var}(\hat{a}_1)}} \simeq \frac{1 - \frac{DW}{2}}{\sqrt{\frac{1}{n} - \widehat{Var}(\hat{a}_1)}}$$

$\hat{\rho}$ est l'estimation de ρ , comme on a vu que $DW \simeq 2(1 - \hat{\rho})$ on en déduit que $\hat{\rho} \simeq 1 - DW/2$; n est la taille de l'échantillon et $\widehat{Var}(\hat{a}_1)$ est la variance estimée du **premier retard sur l'endogène**.

Durbin a montré que sous l'hypothèse H0 de non autocorrélation des erreurs cette variable H suit asymptotiquement une loi Normale centrée réduite. Le fait que ce test soit asymptotique n'est pas un problème car nous verrons qu'il est indispensable d'avoir des échantillons importants pour travailler sur des modèles autorégressifs.



1.2.1 Exemple 1

Prenons un premier exemple où on étudie la consommation des USA CM en fonction du revenu disponible RD, d'un indice de richesse SP (données en volume) et du taux de chômage TCHO. Nous nous proposons de construire un modèle autorégressif donc nous allons ajouter comme variable explicative la consommation en t-1

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable CM
Quarterly Data From 1955:01 To 2002:04
Usable Observations    192      Degrees of Freedom    187
Centered R**2          0.999829    R Bar **2            0.999825
Uncentered R**2        0.999971    T x R**2             191.994
Mean of Dependent Variable    3335.9619792
Std Error of Dependent Variable 1514.8307629
Standard Error of Estimate    20.0221378
Sum of Squared Residuals      74965.682437
Regression F(4,187)          273279.1053
Significance Level of F      0.00000000
Log Likelihood              -845.29607
Durbin-Watson Statistic      1.568746
```

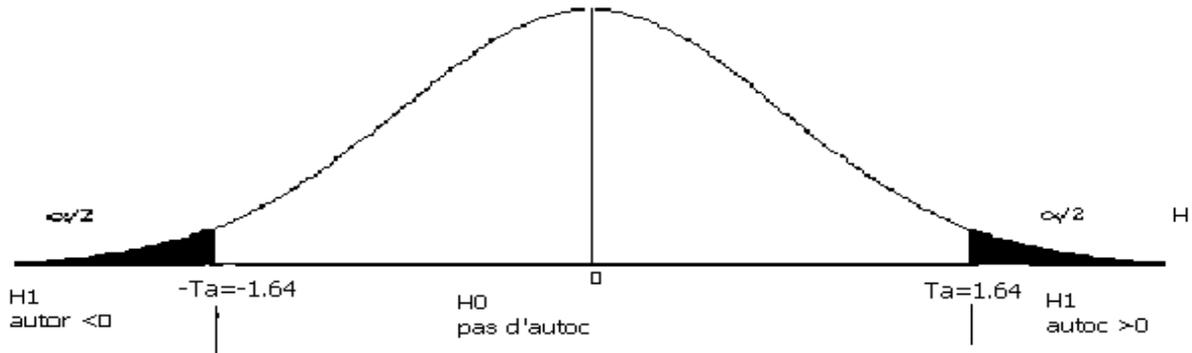
Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Constant	11.777343615	6.810514481	1.72929	0.08540773
2. CM{1}	0.846377180	0.032511517	26.03315	0.00000000
3. RD	0.134173646	0.028331250	4.73589	0.00000430
4. SP	0.081814908	0.013824883	5.91795	0.00000002
5. TCHO	0.497399194	1.274791379	0.39018	0.69684689

Calculons la statistique H, on a n=192, DW=1.5687, pour trouver la variance estimée du premier retard (ici il n'y en a qu'un) on prend l'écart-type estimé fourni par les MCO qui est de 0.0325 et on l'élève au carré soit

$$H = \frac{1 - \frac{1.5687}{2}}{\sqrt{\frac{1}{192} - (0.0325)^2}} = 3.346$$

Au risque 5% la borne T_a étant 1.96 on déduit très nettement que nous sommes dans le cas d'une auto corrélation positive importante.

REMARQUE: le test est effectuée ici au risque 5% bilatéral, si on souhaite être homogène avec le test de Durbin-Watson il est préférable de prendre comme lui 5% unilatéral soit une borne T_a de 1.64 (ce qui donne ici la même conclusion).



1.2.2 PROGRAMMATION DE H

Si vous ne voulez pas faire le calcul voici la programmation que vous allez adapter à votre exemple

lin cm start end

constant cm{1} rd sp tcho

**** pour faire le calcul de H de Durbin il faut mettre le premier retard sur l'endogène juste après la constante

com durbin = (1.-%durbin/2.)/sqrt((1./%nobs)-%seesq*%xx(2,2))

dis 'valeur de la statistique de Durbin h=' durbin

1.2.3 Cas où la statistique H n'est pas calculable ($\widehat{Var}(\hat{a}_1) > 1/n$)

Autre exemple: je mets maintenant comme variables explicatives deux retards sur CM

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable CM
Quarterly Data From 1955:01 To 2002:04
Usable Observations      192      Degrees of Freedom  186
Centered R**2            0.999834      R Bar **2          0.999830
Uncentered R**2          0.999972      T x R**2           191.995
Mean of Dependent Variable 3335.9619792
Std Error of Dependent Variable 1514.8307629
Standard Error of Estimate  19.7578945
Sum of Squared Residuals  72609.637234
Regression F(5,186)      224511.3590
Significance Level of F   0.00000000
Log Likelihood            -842.23052
Durbin-Watson Statistic  1.970985
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. Constant	9.372260980	6.791562618	1.37999	0.16924746
2. CM{1}	1.020199980	0.077688594	13.13191	0.00000000
3. CM{2}	-0.167977895	0.068375574	-2.45669	0.01493944
4. RD	0.128537510	0.028051320	4.58223	0.00000842
5. SP	0.076395100	0.013819656	5.52800	0.00000011
6. TCHO	0.643582343	1.259373779	0.51103	0.60993357

- Calculons la statistique H: $n=192$, $DW=1.97$ et la variance du premier retard (celui en t-1 ici) est $(0.0777688)^2$

$$H = \frac{1 - \frac{1.97}{2}}{\sqrt{\frac{1}{192} - (0.0777688)^2}}$$

On constate que H ne peut être calculé car $\frac{1}{192} - (0.0777688)^2 = -0.00082$ valeur négative donc sa racine n'est pas calculable.

Cela se produit donc lorsque $Var(\hat{a}_1) > 1/n$ ce qui est très fréquent lorsqu'il y a comme variables explicatives plusieurs retards sur l'endogène (la cause étant un problème de colinéarité entre ces retards qui augmente les variances).

- Dans ce cas on remplace le test de Durbin par le test suivant qui est très proche du test de Goldfeld et Breusch que l'on va voir ci-dessous.

On effectue les MCO sur le modèle et on récupère les résidus e_t , puis on construit l'équation:

$$e_t = \rho e_{t-1} + \text{toutes les variables explicatives du modèle de base} \\ \text{y compris les retards sur l'endogène sauf la constante}$$

et on effectue simplement le test de Student (ici avec la loi Normale car on est toujours dans le cadre des grands échantillons) sur le coefficient $\hat{\rho}$ du retard sur le résidu.

Dans notre exemple on prend les résidus RES du modèle ci-dessus

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable RES
Quarterly Data From 1955:02 To 2002:04
Usable Observations    191      Degrees of Freedom    185
Centered R**2          0.002551      R Bar **2            -0.024407
Uncentered R**2        0.002566      T x R**2              0.490
Mean of Dependent Variable      -0.07408982
Std Error of Dependent Variable  19.52169290
Standard Error of Estimate      19.75848960
Sum of Squared Residuals        72223.613594
Log Likelihood              -837.83353
Durbin-Watson Statistic          1.996720
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. RES{1}	0.164456076	0.240644692	0.68340	0.49521045
2. CM{1}	-0.159324077	0.239435307	-0.66542	0.50661322
3. CM{2}	0.143906670	0.217807025	0.66071	0.50962199
4. RD	0.013679782	0.032333287	0.42309	0.67272346
5. SP	0.009333926	0.018996466	0.49135	0.62376088
6. TCHO	0.246318630	0.990483083	0.24869	0.80388004

Dans notre exemple $\hat{\rho}=0.1644$ et le 't' = 0.6834 cette valeur étant comprise entre -1.96 et +1.96 on déduit H1 pas d'autocorrélation d'ordre 1.

- Conclusion: dans les modèles autorégressifs il ne faut pas utiliser le test de DW mais le test H de Durbin et le remplacer par le test ci-dessus proche de Goldfrey et Breusch SEULEMENT si H n'est pas calculable.

1.2.4 Programmation du test de Goldfrey et Breusch

```

lin cm start end res
# constant cm{1 to 2} rd sp tcho
com durbin = (1.-%durbin/2.)/sqrt((1./%nobs)-%seesq*%xx(2,2))
dis 'valeur de la statistique de Durbin h=' durbin
**** on constate que H n'est pas calculable ( H=NA) et on fait le test
***** test de remplacement
lin res start+1 end
# res{1} cm{1 to 2} rd sp tcho
*** on regarde la significativité du coefficient  $\rho$  de res{1}
*** on peut aussi comme dans le test de Goldfrey et Breusch calculer le nR2 de ce modèle
qui suit un  $\chi_1^2$  sous l'hypothèse H0 ( voir plus de détails dans les tests asymptotiques. La
valeur de nR2 et le niveau de significativité seront donné par la ligne suivante à ajouter
après cette dernière régression
dis 'ou bien nR2=' %trsq 'suit un khi2 à 1 degré de liberté sous H0'
cdf chisque %trsq 1
dis

```

2 Tests d'autocorrélation d'ordre 1 asymptotiques

Si $n > 100$ le test de Durbin-Watson n'est plus tabulé. On peut faire une approximation des bornes si n est légèrement supérieur à 100 et ensuite pour des valeurs encore plus grandes considérer que l'on est dans le cadre asymptotique et

Si $n < 100$ environ on utilise le test de Durbin et Watson

Si $100 < n < 200$ environ on utilise le test de Goldfrey et Breusch

Si $n > 200$ on utilise le test issu du théorème central limite

Il faut respecter ces conclusions car le test le plus puissant est DW puis GB et enfin le dernier.

2.1 Le test de Goldfrey et Breusch

Ce test asymptotique teste directement la significativité du coefficient ρ dans $\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + u_t$ où u est un bruit blanc avec le test de WALD.

les hypothèses du test sont les mêmes

H0 : il y a non autocorrélation $\iff \rho = 0$

H1 : il y a autocorrélation $\iff \rho \neq 0$ avec toujours $|\rho| < 1$

Mais pour des raisons de puissance du test ils proposent de tester la significativité de ρ dans un modèle avec les résidus dans lequel ont ajoute toutes les variables du modèle sauf la constante.

Dans un modèle de base comme par exemple

$$Y_t = a_0 + a_1X_t + a_2Z_t + \epsilon_t$$

on va tester l'autocorrélation d'ordre 1 en estimant le modèle à l'aide des MCO, en récupérant les résidus e_t et en construisant

$$e_t = \rho e_{t-1} + b_1X_t + b_2Z_t + w_t$$

où w_t est un bruit blanc. Ce modèle est un modèle autorégressif (la variable endogène e_t dépend de cette même variable retardée e_{t-1}) et on peut montrer que l'estimateur du coefficient du retard est moins biaisé si le modèle n'est pas purement autorégressif ($e_t = \rho e_{t-1} + u_t$). on effectue les MCO sur ce dernier modèle. Goldfrey et Breusch ont montré que sous l'hypothèse H0 nR^2 suit asymptotiquement la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. Le R^2 est bien sur ici le R^2 non centré puisque ce modèle n'a pas par construction de constante. RATS fournit directement ce nR^2 .

On constate que ce test est proche du test vu dans le cas des modèles autorégressifs. ces deux tests sont asymptotiquement équivalents.

2.1.1 Exemple:

lin Y / res

constant X Z

On fait les MCO et on récupère les résidus notés RES

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1952:01 To 1986:04
Usable Observations      140      Degrees of Freedom   137
Centered R**2            0.999992      R Bar **2           0.999992
Uncentered R**2          0.999999      T x R**2            140.000
Mean of Dependent Variable      861564.15846
Std Error of Dependent Variable 373482.05948
Standard Error of Estimate           1055.19388
Sum of Squared Residuals      152540474.34
Regression F(2,137)           8706755.5683
Significance Level of F           0.00000000
Log Likelihood                -1171.74226
Durbin-Watson Statistic           2.282586
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Constant	9787.3092302	225.5196027	43.39893	0.00000000
2. X	0.8005751	0.0009725	823.19942	0.00000000
3. Z	0.4975071	0.0055160	90.19351	0.00000000

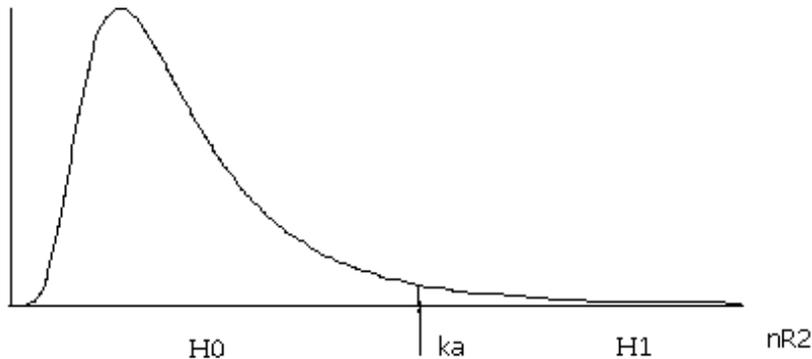
On construit l'équation des résidus en t en fonction des résidus en t-1 et des variables explicatives du modèle hors la constante.

```
lin res
# res{1} x z
```

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable RES
Quarterly Data From 1952:02 To 1986:04
Usable Observations    139      Degrees of Freedom    136
Centered R**2          0.020920    R Bar **2            0.006521
Uncentered R**2        0.020926    T x R**2              2.909
Mean of Dependent Variable    -2.766016
Std Error of Dependent Variable 1050.850549
Standard Error of Estimate    1047.418489
Sum of Squared Residuals      149203626.83
Log Likelihood                -1162.33369
Durbin-Watson Statistic       1.959084
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. RES{1}	-0.145196417	0.085166408	-1.70486	0.09050466
2. X	0.000107145	0.000912838	0.11738	0.90673517
3. Z	-0.000655636	0.005437710	-0.12057	0.90420800

$n = 139$ et R^2 non centré $= .0209$ on trouve le résultat $nR^2 = 2.909$ fourni par RATS
 Sous H_0 nR^2 suit un χ_1^2 , on obtient donc les régions suivantes:



au risque $\alpha = 5\% = \text{prob}\{nR^2 > ka\}$ ou $1 - \alpha = 95\% = \text{prob}\{nR^2 < ka\}$ on obtient $ka = 3.84$
 ici $nR^2 = 2.909$ étant inférieur à ka on va décider H_0 : il n'y a pas d'autocorrélation d'ordre 1.

- Remarque: ce test est asymptotique, il ne sera utilisé que pour n grand, en aucun cas il ne peut remplacer DW pour des valeurs de $n < 100$ celui-ci restant et de loin, malgré ses défauts, le plus puissant.

2.1.2 Programmation du test de Goldfrey et Breusch

Si on reprend l'exemple voici les lignes à écrire avec les commentaires qui sont précédés de ***

```
lin Y start end res
# constant X Z
*** la régression donne les résidus notés res
```

```

lin res start end
# res{1} X Z
dis 'nR2=' %trsq 'suit un khi2 à 1 degré de liberté sous H0'
cdf chisque %trsq 1
dis
*** vous avez ainsi directement nR2 et le niveau de significativité

```

2.2 Test asymptotique issu du théorème central limite pour n très grand

Ce test est basé sur le test direct du coefficient ρ .

Comme précédemment les hypothèses du test sont les mêmes

H0 : il y a non autocorrélation $\iff \rho = 0$

H1 : il y a autocorrélation $\iff \rho \neq 0$ avec toujours $|\rho| < 1$

Dans un modèle de base comme par exemple

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Z_t + \epsilon_t$$

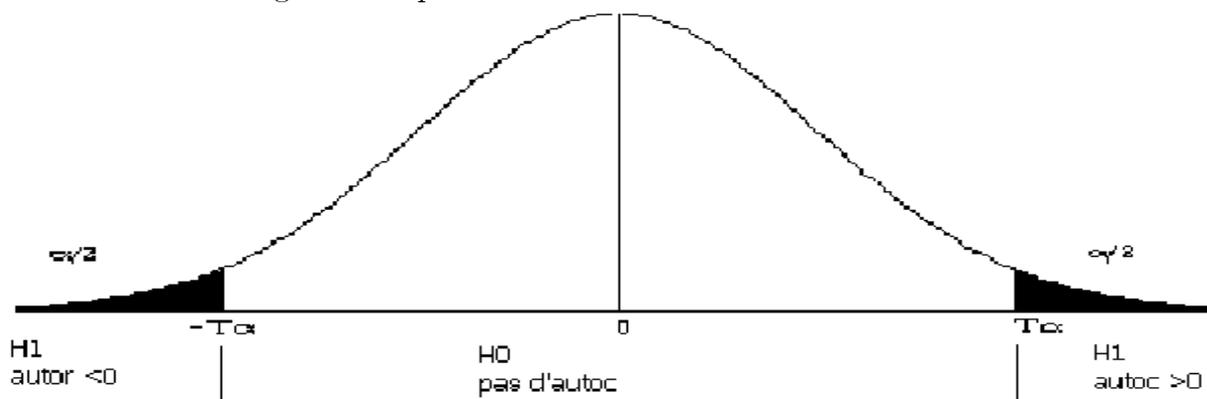
on va tester l'autocorrélation d'ordre 1 en estimant le modèle à l'aide des MCO, en récupérant les résidus e_t et en construisant

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t$$

où u_t est un bruit blanc. Dans ce modèle autorégressif on estime ρ par les MCO (nous verrons dans le chapitre sur les modèles autorégressifs que cette estimation n'est pas très bonne), on obtient $\hat{\rho}$. Le théorème central limite montre que pour n grand la variable $\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho)$ suit asymptotiquement une loi Normale centrée réduite. Or sous l'hypothèse H0 on a $\rho = 0$

Sous H0 vrai $\sqrt{n}\hat{\rho}$ suit asymptotiquement $N(0, 1)$

On obtient donc les régions critiques



Si $\sqrt{n}\hat{\rho}$ est entre les bornes $-T\alpha$ et $+T\alpha$ on décide H0 pas d'autocorrélation d'ordre 1

Si $\sqrt{n}\hat{\rho}$ est supérieur à $T\alpha$ ou inférieur à $-T\alpha$ on n'est plus au risque α de se tromper dans la loi normale et on décide H1.

CE TEST N'EST UTILISABLE QUE DANS LE CADRE DES TRES GRANDS ECHANTILLONS.

Pour le faire en pratique on va récupérer $\hat{\rho}$ en se souvenant que $DW \simeq 2(1 - \hat{\rho})$ donc $\hat{\rho} \simeq 1 - DW/2$

Pas de programmation car le test se fait sans problème à la main.

3 Que faire dans le cas d'autocorrélation d'ordre 1 ?

En théorie il existe des méthodes les moindres carrés généralisés MCG mais il ne faut surtout pas se précipiter pour traiter par ces méthodes car si autocorrélation il y a c'est que le modèle est mauvais et qu'il a des problèmes qu'il est préférable de traiter directement. Quels sont ces problèmes ? On en retiendra quelques uns qui sont les plus courants.

3.1 L'oubli de variables explicatives

Ce premier problème est souvent la plus importante cause d'autocorrélation des erreurs.

3.1.1 Pourquoi ?

Prenons l'exemple du 'bon modèle' suivant

$$Y_t = a_0 + a_1X_t + a_2Z_t + \epsilon_t$$

dans lequel les erreurs sont non autocorrélées et supposons que l'on oublie la variable Z. le modèle va devenir

$$Y_t = b_0 + b_1X_t + u_t$$

L'influence de la variable Z oubliée va se retrouver dans les estimations de b_0 et de b_1 qui seront en général différentes de estimations de a_0 et de a_1 (sauf comme nous le verrons plus loin dans les cas de variables orthogonales), le reste de l'influence se retrouvant dans les erreurs u_t . On en déduit donc que u_t dépend de Z_t , de même u_{t-1} dépend de Z_{t-1} donc la corrélation entre u_t et u_{t-1} dépend de celle entre Z_t et celle de Z_{t-1} . En macroéconomie la plupart des variables sont corrélées dans le temps, ce qui se passe en t pour une variable Z est lié à ce qui se passe en t-1 pour cette même variable. Conclusion, plus la variable Z est liée avec elle-même dans le temps, plus l'erreur u est liée avec elle-même dans le temps et donc plus la corrélation entre u en t et en t-1 est importante, ce qui est la définition de l'autocorrélation d'ordre 1. Bien sur tout cela est bien beau, mais si on a oublié la variable Z c'est souvent parce que l'on avait pas les moyens de la mesurer. Que faire alors ? Nous allons voir dans les chapitres des modèles dynamiques que ceux-ci sont en grande partie élaborés pour essayer de résoudre ce problème.

3.1.2 Exemple:

On prend comme ci-dessus un 'bon modèle' avec 3 variables et on oublie Z

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1952:01 To 1976:04
Usable Observations      100      Degrees of Freedom      97
Centered R**2            0.999972      R Bar **2            0.999972
Uncentered R**2         0.999997      T x R**2              100.000
```

```

Mean of Dependent Variable      660338.18035
Std Error of Dependent Variable 212626.18247
Standard Error of Estimate      1127.54340
Sum of Squared Residuals       123321350.46
Regression F(2,97)             1760192.5507
Significance Level of F        0.00000000
Log Likelihood                  -843.15055
Durbin-Watson Statistic        2.372511

```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. Constant	9780.3502417	373.3171200	26.19850	0.00000000
2. X	0.7993660	0.0017203	464.67797	0.00000000
3. Z	0.5049142	0.0094626	53.35884	0.00000000

```

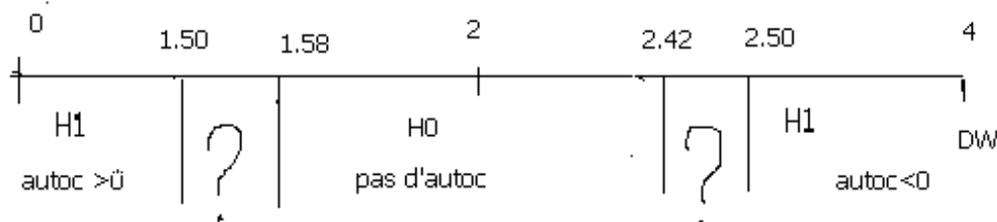
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1952:01 To 1976:04
Usable Observations      100      Degrees of Freedom      98
Centered R**2            0.999164      R Bar **2            0.999155
Uncentered R**2          0.999922      T x R**2            99.992
Mean of Dependent Variable 660338.18035
Std Error of Dependent Variable 212626.18247
Standard Error of Estimate 6180.18336
Sum of Squared Residuals 3743077301.5
Regression F(1,98)      117085.3631
Significance Level of F  0.00000000
Log Likelihood          -1013.79404
Durbin-Watson Statistic 0.200206

```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. Constant	6029.2734339	2009.5834007	3.00026	0.00342059
2. X	0.8876149	0.0025940	342.17739	0.00000000

Dans le bon modèle la statistique de Durbin-Watson est de 2.37, la table donne pour $n=100$ et $k'=2$ les valeurs 1.5 et 1.58



Il n'y a donc pas d'autocorrélation.

Lorsque la variable Z est oubliée la statistique $DW=0.2$ il y a donc une forte autocorrélation d'ordre 1 positive. (pour $n=100$ et $k'=1$ la table donne 1.52 et 1.56)

3.1.3 Que faire ?

- chercher des variables à ajouter au modèle et si cela ne suffit pas on va transformer ce modèle statique en modèle dynamique comme on le verra dans le chapitre suivant.
- On peut appliquer (mais ce n'est pas recommandé dans un premier temps) la méthode des moindres carrés généralisés. Voir le chapitre suivant.

3.2 Un modèle instable peut causer de l'autocorrélation

Nous allons voir sur un exemple que dans le cas d'un modèle instable nous retrouvons très souvent de l'autocorrélation.

Prenons l'exemple suivant:

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1952:01 To 1986:04
Usable Observations    140      Degrees of Freedom    137
Centered R**2          0.996568    R Bar **2           0.996518
Uncentered R**2        0.999586    T x R**2            139.942
Mean of Dependent Variable 793493.26131
Std Error of Dependent Variable 295018.47047
Standard Error of Estimate 17409.32357
Sum of Squared Residuals 41522582943
Regression F(2,137)    19889.6106
Significance Level of F 0.00000000
Log Likelihood         -1564.20165
Durbin-Watson Statistic 0.062617
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Constant	123729.89045	3720.77949	33.25376	0.00000000
2. X	0.58171	0.01605	36.25430	0.00000000
3. Z	0.67866	0.09101	7.45724	0.00000000

Dans ce modèle la statistique de DW est de 0.062 si proche de 0 que les tables sont inutiles pour décider H1 une très forte autocorrélation d'ordre 1. Regardons maintenant si le modèle est stable. La procédure de CHOW décrit dans le chapitre sur le test de CHOW donne le résultat suivant

LE MODELE EST INSTABLE

le plus grand Fisher $f = 1.221e+04$ pour un niveau de significativité $ns = 0.000000$

le point correspondant à ce plus grand Fisher est 1970:01

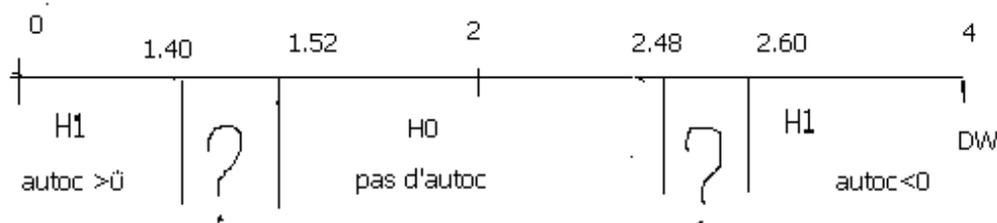
On va donc étudier les deux sous-parties du modèle.

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1952:01 To 1969:04
Usable Observations    72      Degrees of Freedom    69
Centered R**2          0.999902    R Bar **2           0.999899
Uncentered R**2        0.999996    T x R**2            72.000
Mean of Dependent Variable 546133.58521
Std Error of Dependent Variable 112083.10143
Standard Error of Estimate 1125.63834
Sum of Squared Residuals 87427255.662
Regression F(2,69)    351939.7378
Significance Level of F 0.00000000
Log Likelihood         -606.51103
Durbin-Watson Statistic 2.319066
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
----------	-------	-----------	--------	--------

```
*****
1. Constant      10307.274151  820.460785  12.56279  0.00000000
2. X             0.797714    0.003349   238.16687  0.00000000
3. Z             0.509513    0.014585   34.93437  0.00000000
*****
```

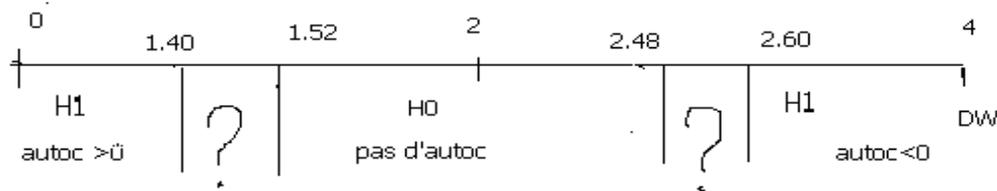
Dans cette première sous-partie le $DW=2.32$, les bornes du test pour $n=72$ et $k'=2$ sont environ 1.40 et 1.52 soit pour des valeurs supérieures à 2 2.48 et 2.60



DW étant entre 1.52 et 2.48 on décide donc non autocorrélation

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Quarterly Data From 1970:01 To 1986:04
Usable Observations      68      Degrees of Freedom      65
Centered R**2            0.999970  R Bar **2              0.999969
Uncentered R**2          0.999999  T x R**2              68.000
Mean of Dependent Variable 1055403.5066
Std Error of Dependent Variable 178551.3427
Standard Error of Estimate      991.2412
Sum of Squared Residuals      63866348.249
Regression F(2,65)           1086924.3900
Significance Level of F      0.00000000
Log Likelihood              -564.08287
Durbin-Watson Statistic      2.286478
```

```
*****
Variable      Coeff      Std Error      T-Stat      Signif
*****
1. Constant   160655.20556  621.26284    258.59459  0.00000000
2. X          0.60075     0.00110     543.98567  0.00000000
3. Z          0.39547     0.00589     67.14426  0.00000000
*****
```



La taille d'échantillon est de $n=68$ les bornes sont environ 1.40 et 1.52

Comme $DW=2.28$ on décide H_0 pas d'autocorrélation. Nous voyons sur cet exemple que les deux sous-parties ne présentent pas d'autocorrélation mais que le modèle global est très corrélé. Il ne faut surtout pas faire la méthode des MCG sur le modèle global (on verra que dans ce cas la méthode marche rarement) mais comme nous l'avons vu dans le test de CHOW étudier séparément les deux parties ce qui va régler ce problème d'autocorrélation.

3.3 Une mauvaise spécification du modèle peut entraîner l'autocorrélation

Nous allons voir ce problème sur un exemple .

Prenons le cas où nous ne savons pas si le modèle est additif ou multiplicatif.

Un modèle additif est un modèle linéaire donc un modèle dans lequel la variable expliquée est combinaison linéaire de variables explicatives plus un terme erreur

$$Y = a_0 + a_1Z1 + a_2Z2 + u$$

Un modèle multiplicatif est un modèle dans lequel la variable expliquée dépend des variables explicatives sous une forme multiplicative

$$Y = c_0Z1^{b1}Z2^{b2}e^u$$

Ce modèle n'est pas linéaire, il a comme propriété économique que l'élasticité de Y par rapport à Z1 est b1 celle par rapport à Z2 est b2, ce sont donc des élasticités constantes ce qui n'est pas bien sur le cas dans le modèle linéaire.

Sous cette forme le modèle peut être **linéarisé**, il suffit de passer en log népérien, on mettra la lettre L devant les variables en log.

$$\begin{aligned} \log(Y) &= \text{Log}(c_0) + b_1\text{Log}(Z1) + b_2\text{Log}(Z2) + u \\ LY &= b_0 + b_1LZ1 + b_2LZ2 + u \end{aligned}$$

Les élasticités constantes sont les coefficients des variables du modèles LZ1 et LZ2, la constante est $b_0 = \text{Log}(c_0)$

- REMARQUE : si le modèle était multiplicatif pour les variables et additif pour l'erreur, on aurait

$$Y = c_0Z1^{b1}Z2^{b2} + u$$

alors le modèle ne pourrait pas être transformé (le log d'une somme n'est pas la somme des log) et le modèle resterait non linéaire.

On est souvent amené en économie à choisir entre ces deux formes, il existe le test de BOX-COX (voir dans le chapitre sur la sélection de modèles) permettant de faire ce choix. Nous allons simplement montrer ici sur un exemple que si on se trompe sur la forme alors il y aura autocorrélation des erreurs.

Nous expliquons Y par Z1 et Z2,

- modèle linéaire

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable Y
Usable Observations      100      Degrees of Freedom      97
Centered R**2            0.768116    R Bar **2              0.763335
Uncentered R**2          0.882302    T x R**2               88.230
Mean of Dependent Variable      1787.5582602
Std Error of Dependent Variable 1823.9899204
Standard Error of Estimate      887.3390122
```

Sum of Squared Residuals	76374940.689
Regression F(2,97)	160.6563
Significance Level of F	0.00000000
Log Likelihood	-819.19360
Durbin-Watson Statistic	1.084641

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. Constant	-7115.13739	542.59493	-13.11317	0.00000000
2. Z1	37211.14482	9410.99651	3.95401	0.00014612
3. Z2	3289.18195	645.65033	5.09437	0.00000172

On remarque un DW=1.08 la table indique une forte autocorrélation positive des erreurs

- modèle multiplicatif linéarisé on estime le modèle avec les variables en LOG Népérien

Linear Regression - Estimation by Least Squares
 Dependent Variable LY
 Usable Observations 100 Degrees of Freedom 97
 Centered R**2 0.962311 R Bar **2 0.961534
 Uncentered R**2 0.998937 T x R**2 99.894
 Mean of Dependent Variable 6.9084290669
 Std Error of Dependent Variable 1.1828395392
 Standard Error of Estimate 0.2319866061
 Sum of Squared Residuals 5.2203251841
 Regression F(2,97) 1238.3592
 Significance Level of F 0.00000000
 Log Likelihood 5.73667
 Durbin-Watson Statistic 2.091987

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. Constant	10.843941831	0.687951316	15.76266	0.00000000
2. LZ1	2.358251190	0.287310304	8.20803	0.00000000
3. LZ2	3.780820001	0.231573444	16.32666	0.00000000

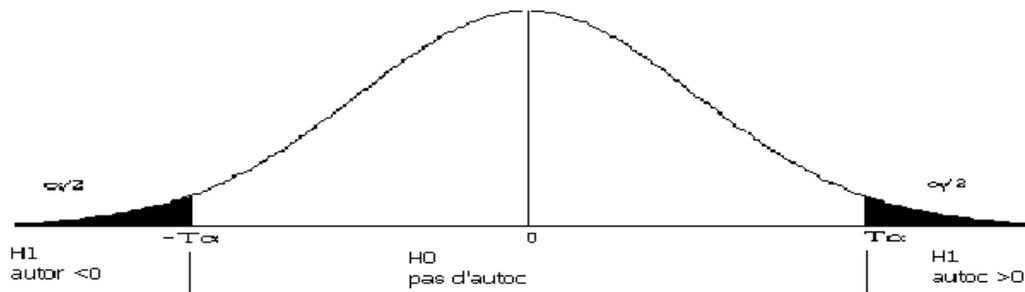
Dans ce modèle DW=2.09 il n'y a donc plus d'autocorrélation. Les élasticités estimées sont 2.358 et 3.78. Il est donc évident que pour traiter l'autocorrélation il ne faut surtout pas faire les MCG sur le modèle linéaire mais étudier le modèle multiplicatif que l'on transforme à l'aide des LOG des variables pour le linéariser.

3.4 CONCLUSION

Voici les trois causes principales d'une autocorrélation d'ordre 1. Il faut retenir et je me répète que les MCG ne devront être appliqués que si on n'a pas trouvé la réelle cause de l'autocorrélation, ce qui en fait est très rare.

4 Test d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1

Tous ces tests sont asymptotiques, ils n'ont donc une puissance très faible dans le cadre des petits échantillons.



4.1 Le test asymptotique issu du théorème central limite

C'est une généralisation du test asymptotique décrit plus haut. Au lieu de tester une autocorrélation d'ordre 1 on teste une autocorrélation d'ordre quelconque r

Comme précédemment les hypothèses du test sont les mêmes

H_0 : il y a non autocorrélation $\iff \rho_r = 0$

H_1 : il y a autocorrélation $\iff \rho_r \neq 0$ avec toujours $|\rho_r| < 1$

Dans un modèle de base comme par exemple

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Z_t + \epsilon_t$$

on va tester l'autocorrélation d'ordre 1 en estimant le modèle à l'aide des MCO, en récupérant les résidus e_t et en construisant

$$e_t = \rho_r e_{t-r} + u_t$$

où u_t est un bruit blanc. Dans ce modèle autorégressif on estime ρ_r par les MCO (nous verrons dans le chapitre sur les modèles autorégressifs que cette estimation n'est pas très bonne), on obtient $\hat{\rho}_r$. Le théorème central limite montre que pour n grand la variable $\sqrt{n}(\hat{\rho}_r - \rho_r)$ suit asymptotiquement une loi Normale centrée réduite. Or sous l'hypothèse H_0 on a $\rho_r = 0$

Sous H_0 vrai $\sqrt{n}\hat{\rho}_r$ suit asymptotiquement $N(0, 1)$

Ce test n'est pas très puissant il faut une taille d'échantillon importante.

4.2 Le test de Box-Pierce

Ce test est issu des résultats précédents. On se propose de regarder si l'autocorrélation des erreurs n'est pas d'ordre r supérieure à 1 avec la forme

$$\epsilon_t = \rho_1 \epsilon_{t-1} + \rho_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \rho_r \epsilon_{t-r} + u_t$$

où u est toujours un bruit blanc.

Le test de Box-Pierce teste

H0 $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$ pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à r

H1 l'un au moins des $\rho_i \neq 0$ il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et r

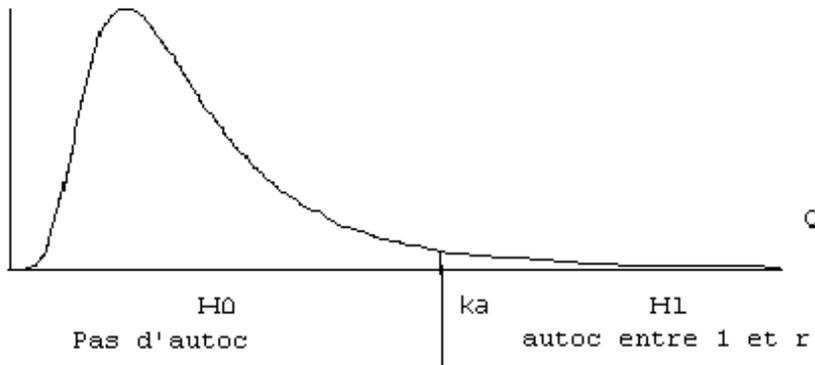
Pour l'effectuer on récupère les résidus e_t du modèle de base et on construit

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + u_t$$

Les MCO sur ce modèle donnent des estimations $\hat{\rho}_i$ des ρ_i . Box et Pierce ont montré que sous l'hypothèse H0 la variable Q

$$Q = n \sum_1^r \hat{\rho}_i^2$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 à r degrés de liberté.



Ce test est peut utilisé, il est remplacé par un test proche mais qui est utilisable dans des échantillons de taille plus petite.

4.3 Le test de Ljung-Box

Les hypothèses du test sont les mêmes, on teste:

H0 $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$ pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à r

H1 l'un au moins des $\rho_i \neq 0$ il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et r

Pour l'effectuer on récupère les résidus e_t du modèle de base et on construit

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + u_t$$

Les MCO sur ce modèle donnent des estimations $\hat{\rho}_i$ des ρ_i . Ljung et Box ont montré que sous l'hypothèse H0 la variable Q'

$$Q' = n(n+2) \sum_1^r \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i}$$

suit sous l'hypothèse H0 une loi du χ^2 à r degrés de liberté.

Par la suite on notera Q cette statistique car elle est beaucoup plus utilisée que la statistique de Box-Pierce.

Ce test est le plus utilisé des tests d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1. Le plus souvent les logiciels ne le fournissent pas directement, il faut les calculer à part. Nous verrons à la

fin de cette partie que la procédure autocor.src va nous donner directement ces résultats. Nous donnons ici le détail pour ce test.

Mais avant, posons-nous la question de la valeur de r, RATS propose de regarder au maximum pour $r_{\max} = \text{partie entière du } \text{MIN}(n/4, 2\sqrt{n})$

4.3.1 Programmation du calcul de Q , la commande CORR

Par exemple , on reprend l'étude de la consommation des ménages US dans le programme CMUS1.PRG et on estime le modèle statique suivant:

```
lin cm start end residus
# constant rd sp tcho
corr(qstat,span=4,dfc=0 ) residus start end
```

Description: CORR étudie la corrélation,

QSTAT indique que l'on calcule aussi les statistiques Q de Ljung-Box, avec SPAN vous pouvez choisir les différentes valeurs de r ,si SPAN=1 on aura Q(1) Q(2) Q(rmax) ; ici SPAN=4 on aura Q(4) Q(8) Q(rmax), Span choisit donc le pas. Si on ne met pas SPAN, RATS va donner seulement le dernier Q celui qui correspond à rmax

DFC corrige la loi de Q pour les modèles AR et MA en tenant compte du nombre de retards sur l'endogène pour les AR et du nombre de retards sur les exogènes pour les MA. Ici le modèle étant statique on a DFC=0.

RESIDUS est le nom que vous donnez aux résidus du modèle. Vous donnez le nom que vous voulez à condition qu'il soit défini dans la régression comme ici la première ligne lin cm start end residus

START et END sont le début et la fin de l'échantillon étudié.

Correlations of Series RESIDUS

Quarterly Data From 1955:01 To 2002:04

Autocorrelations

1: 0.6798094 0.6040097 0.4851042 0.3148037 0.1848493 0.1397802 0.0599426
-0.0058005 -0.0285958 -0.1218104 -0.2174159

12: -0.2429987 -0.2822618 -0.3350931 -0.3387095 -0.3388663 -0.3500935 -0.3340050
-0.2827458 -0.2175551 -0.1155757 0.0210783

23: 0.1058305 0.1537793 0.2348235 0.2745952 0.2957940

Ljung-Box Q-Statistics

Q(4-0) = 227.6590. Significance Level 0.00000000

Q(8-0) = 239.1080. Significance Level 0.00000000

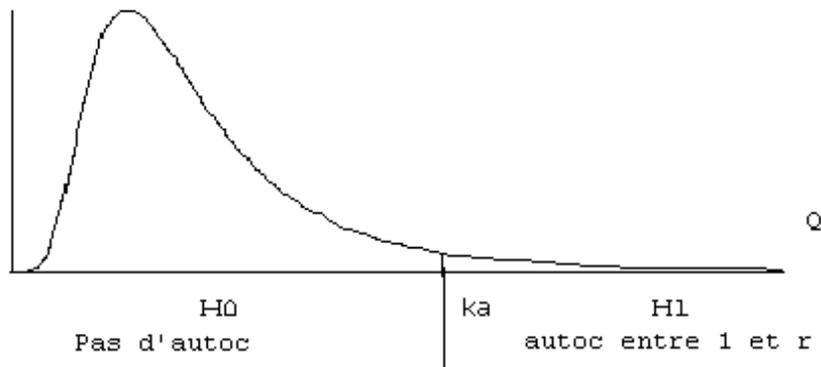
Q(12-0)= 264.2579. Significance Level 0.00000000

Q(16-0)= 352.7787. Significance Level 0.00000000

Q(20-0)= 430.2101. Significance Level 0.00000000

Q(24-0)= 440.9287. Significance Level 0.00000000

On a tout d'abord les autocorrélations des résidus puis les statistiques de Ljung-Box avec leur niveau de significativité. On peut donc faire les tests de deux façons, par exemple pour $Q(4)=227.66$ sous l'hypothèse H_0 Q suit asymptotiquement un χ_4^2 donc $k_a=9.49$ or $Q(4)>k_a$ on décide donc très nettement H_1 . On peut aussi dire que le niveau de significativité (significance level) $ns=\text{Prob}(\chi_4^2>227.66)=0.0000$ est inférieur à 5% on décide donc H_1 . Il y a donc de l'autocorrélation des erreurs entre 1 et 4.



Pour $Q(24)=440.93$, sous l'hypothèse H_0 Q suit un χ_{24}^2 donc $ka=36.42$ or $440.93 > ka$ on décide donc très nettement H_1 il y a de l'autocorrélation des erreurs entre 1 et 24.

4.3.2 Remarque importante

Ce test n'est pas utilisé pour tester l'autocorrélation d'ordre 1 car il est beaucoup moins puissant que Durbin-Watson. Par conséquent vous pouvez très bien avoir des résultats suivants:

- le test de DW indique qu'il y a de l'autocorrélation d'ordre 1
- le test de Ljung-Box indique que $Q(4)$ décide H_0 il n'y a pas d'autocorrélation entre 1 et 4

En théorie ce n'est pas logique, mais en pratique c'est DW qui est le plus puissant, la conclusion sera donc il y a de l'autocorrélation d'ordre 1 mais pas d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1.

4.4 Le test de GOLDFREY et BREUSCH

Nous l'avons déjà vu plus haut dans le cas de l'autocorrélation d'ordre 1.

Il teste les mêmes hypothèses que le test de LJUNG-BOX

H_0 $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$ pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à r

H_1 l'un au moins des $\rho_i \neq 0$ il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et r

Pour l'effectuer on récupère les résidus e_t du modèle de base et LJUNG et BOX se sont donc basés sur l'estimation du modèle

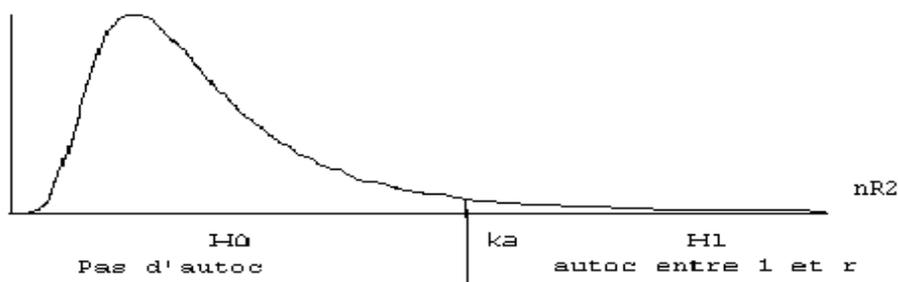
$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + u_t$$

mais dans lequel ils ajoutent les variables explicatives du modèle sauf la constante.

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + \text{toutes les variables explicatives du modèle} + u_t$$

On fait les MCO sur ce dernier modèle et on récupère son R^2 NON CENTRE et sous l'hypothèse H_0 vraie la variable nR^2 suit asymptotiquement la loi du χ^2 à r degrés de liberté autant que de retards sur les résidus.

Pour le choix de r, on peut prendre le même choix qu'avec le test de Ljung-Box $r = \text{Min}(n/4, 2\sqrt{n})$.



4.4.1 Exemple

sur la consommation des ménages US

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable CM
Quarterly Data From 1955:01 To 2002:04
Usable Observations 192      Degrees of Freedom 188
Centered R**2 0.999209      R Bar **2 0.999196
Uncentered R**2 0.999865      T x R**2 191.974
Mean of Dependent Variable 3335.9619792
Std Error of Dependent Variable 1514.8307629
Standard Error of Estimate 42.9408363
Sum of Squared Residuals 346656.09939
Regression F(3,188) 79169.1015
Significance Level of F 0.00000000
Log Likelihood -992.30114
Durbin-Watson Statistic 0.626909
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Constant	62.75344243	13.98955930	4.48573	0.00001263
2. RD	0.86985854	0.00432032	201.34138	0.00000000
3. SP	0.34947662	0.01982126	17.63140	0.00000000
4. TCHO	-9.36158468	2.61057508	-3.58602	0.00042796

On récupère les résidus du modèles notés RESIDUS . Si on veut tester une autocorrélation entre 1 et 4 par exemple on va estimer les résidus en t en fonction des résidus e_{t-1} , e_{t-2} , e_{t-3} et e_{t-4} ainsi que toutes les variables explicatives du modèle du base sauf la constante soit ici RD, SP et TCHO.

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable RESIDUS
Quarterly Data From 1956:01 To 2002:04
Usable Observations 188      Degrees of Freedom 181
Centered R**2 0.515092      R Bar **2 0.499018
Uncentered R**2 0.515180      T x R**2 96.854
Mean of Dependent Variable -0.57703884
Std Error of Dependent Variable 42.85389281
Standard Error of Estimate 30.33202773
Sum of Squared Residuals 166525.77502
Log Likelihood -904.68801
Durbin-Watson Statistic 2.007859
```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. RESIDUS{1}	0.511773397	0.073392277	6.97312	0.00000000

2. RESIDUS{2}	0.316170433	0.083370734	3.79234	0.00020321
3. RESIDUS{3}	0.100064044	0.083834113	1.19360	0.23419820
4. RESIDUS{4}	-0.176444775	0.075888882	-2.32504	0.02117898
5. RD	-0.001780722	0.003083354	-0.57753	0.56430084
6. SP	0.009927451	0.014304948	0.69399	0.48857994
7. TCHO	0.760892556	1.370626149	0.55514	0.57948276

Sous l'hypothèse H_0 nR2 suit asymptotiquement un χ^2 à 4 degrés de liberté car on a testé 4 retards.

Dans ce modèle $n=188$ (4 éléments de moins que dans le modèle de base car on utilise 4 retards sur les résidus). Le R2 non centré est 0.51518 donc nR2=96.854 résultat que vous retrouvez sur la même ligne que le R2 non centré. La borne k_a du χ^2_4 est $k_a=9.49$ au risque 5%, nous constatons que nR2 est nettement supérieur à cette valeur donc nous décidons H_1 il y a de l'autocorrélation entre 1 et 4.

4.4.2 Programmation du test de Goldfrey et Breusch

C'est la généralisation de ce que nous avons vu plus haut. Si on teste une autocorrélation d'ordre r

H_0 $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$ pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à r

H_1 l'un au moins des $\rho_i \neq 0$ il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et r

lin cm start end residus

constant rd sp tcho

*** la régression sur le modèle global permet de récupérer les résidus

*** on va prendre $r=4$

com retards = 4

lin residus start+retards end

residus{1 to retards} rd sp tcho

*** on met start+retards comme début de l'échantillon car on utilise des variables retardées comme explicatives, il faut qu'elles soient définies on ne peut avoir résidus{0} résidus{-1}...

5 Que faire en cas d'autocorrélation d'ordre >1

Les éléments décrits dans le cas d'une autocorrélation d'ordre 1 restent vrais ici et la solution est le passage aux modèles dynamiques c'est-à-dire aux modèles autorégressifs et à retards échelonnés du chapitre suivant.

6 La procédure autocor.src de RATS

Nous avons décrit les différents tests et donné quelques exemples, maintenant nous allons décrire la procédure que nous avons faite pour construire la plupart des ces tests directement puisque RATS ne donne que DW.

ATTENTION LA CONSTANTE DOIT FIGURER ET ETRE LA PREMIERE VARIABLE EXPLICATIVE. En général il y a bien une constante dans la recherche de l'autocorrélation car on a l'habitude des tables de Durbin et Watson qui sont construites

pour des modèles avec un terme constant. (Il existe des tables qui font le test de DW sans terme constant)

Pour le reste je teste si vous avez ou non un modèle autorégressif

Si on étudie le modèle US avec CM comme variable endogène et les variables exogènes la constante, RD, SP et TCHO

source autocor.src

@autocor cm start end

constant rd sp

**** comme déjà vu source appelle la procédure dont le nom est AUTOCOR.SRC

**** sur la deuxième ligne @autocor la variable endogène , le début et la fin de l'échantillon

**** la liste des variables explicatives en commençant par la constante

si on a un modèle autorégressif je recherche le plus petit retard pour faire le test H vous mettez donc les retards sur l'endogène où vous voulez.

- Si vous êtes dans un modèle statique comme ici la procédure va vous donner DW si $n < 100$ sinon elle donne le test de Goldfrey et Breusch. Elle fournit aussi le test de Ljung-Box pour $Q(r_{max})$ seulement sauf si vous prenez l'option décrite dans le dernier point.
- Si vous êtes dans un modèle autorégressif la procédure fournit H de Durbin ou s'il ne peut être calculé, le test de Goldfrey et Breusch. Elle fournit aussi le test de Ljung-Box $Q(r_{max})$ corrigé du nombre de retards sur l'endogène que je récupère directement.
- il y a une option possible: indiquer la valeur de SPAN de la façon suivante (voir définir de Span dans le paragraphe sur Ljung-Box) :

@autocor(retards=2) cm start end

constant rd sp

ici on va voir les valeurs de Q $Q(2)$, $Q(4)$ de 2 en 2 . Si vous mettez retards=4) vous aurez les Q de 4 en 4. Si comme plus haut vous ne mettez rien RATS vous donnera seulement le dernier soit $Q(\text{partie entière de } \text{MIN}(n/4, 2\sqrt{n}))$