

# CORRIGES des EXERCICES du CHAPITRE III

## 1 Corrigé de l'exercice III-1

1)

$$\text{LOG}(Q) = b\text{LOG}(K) + c\text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon$$

a) Sous l'hypothèse  $H_0$  :  $b+c=1$  le modèle devient

$$\begin{aligned}\text{LOG}(Q) &= b\text{LOG}(K) + (1-b)\text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon \\ \text{LOG}(Q) &= b(\text{LOG}(K) - \text{LOG}(L)) + \text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon \\ \text{LOG}(Q) - \text{LOG}(L) &= b(\text{LOG}(K) - \text{LOG}(L)) + \text{LOG}(a) + \epsilon \\ \text{LOG}(Q/L) &= b\text{LOG}(K/L) + \text{LOG}(a) + \epsilon\end{aligned}$$

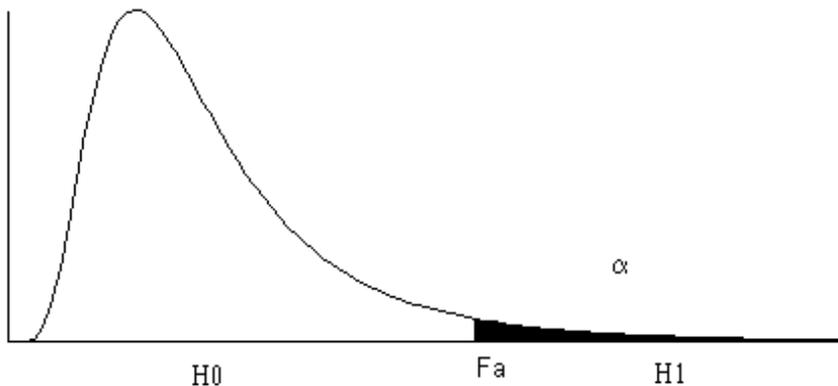
On trouve le modèle 3

b) Sous l'hypothèse  $H_0$  on a le modèle 3 son  $\text{SCR}_3=1,9757$  et le nombre de degrés de liberté est  $n-2=8$

Sous l'hypothèse  $H_1$  on a le modèle 1 son  $\text{SCR}_1=1,8569$  et le nombre de degrés de liberté est  $n-3=7$

Pour tester la contrainte linéaire on utilise la variable

$$F = \frac{\frac{\text{SCR}_3 - \text{SCR}_1}{8-7}}{\frac{\text{SCR}_1}{7}} \text{ qui sous } H_0 \text{ suit un Fisher (1,7)}$$



Sous l'hypothèse  $H_1$  on refuse le fait que la variable  $F$  suive la loi de Fisher donc on décide  $H_1$  si  $F > F_\alpha$  au risque  $\alpha = 0,05$  de se tromper (c'est-à-dire d'être encore dans la loi de Fisher partie en noir)

Sous l'hypothèse  $H_0$  la variable  $F$  suit la loi de Fisher, on est donc entre 0 et  $F_\alpha$  au risque  $\alpha = 0,05$  de se tromper.

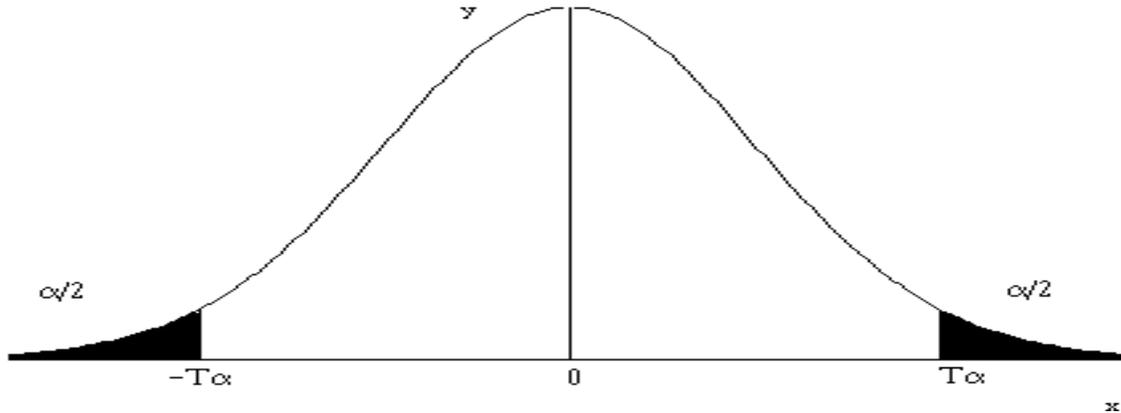
Dans notre exemple  $f=0,448$  très nettement dans la zone de la loi de Fisher donc d'acceptation de  $H_0$  (inférieur à  $F_\alpha = 5,59$  on accepte donc la contrainte  $b+c=1$  donc le modèle 3.

2) Le modèle 1 peut s'écrire

$$\begin{aligned} \text{LOG}(Q) &= b\text{LOG}(K) + c\text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon \\ \text{LOG}(Q) - \text{LOG}(L) &= b(\text{LOG}(K) - \text{LOG}(L)) + (c - 1 + b)\text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon \\ \text{LOG}(Q/L) &= b\text{LOG}(K/L) + (c - 1 + b)\text{LOG}(L) + \text{LOG}(a) + \epsilon \end{aligned}$$

On constate que l'on trouve le modèle 2 et que pour tester  $b+c=1$  il suffit de tester la nullité du coefficient de  $\text{LOG}(L)$

Sous l'hypothèse  $H_0$  le coefficient estimé de  $\text{LOG}(L)$  suit une loi de Student à  $(n-3)$  degrés de liberté, ici  $n-3=7$  donc  $T_\alpha=2,365$



Si la valeur  $t$  est dans l'intervalle  $-2,365 + 2,365$  on décide  $H_0$  sinon on décide  $H_1$  au risque 0,05 de se tromper.

ici  $t = \frac{-0,0953}{0,1424} = -0,67$  on décide donc  $H_0 : b+c=1$

3) Le modèle 3 est le meilleur car il tient compte de la contrainte sur les coefficients. les modèles 1 et 2 sont identiques seule la présentation change.

On ne peut étudier le DW car il n'y a pas d'ordre dans les données, ce n'est pas une chronique et les données ne sont pas classées. Le DW n'a alors aucune signification.

## 2 Corrigé de l'exercice III-2

1) Nous sommes dans le cas d'un modèle autorégressif ( $I_t$  est expliqué par  $I_{t-1}$ ) et à retards échelonnés ( $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  sont deux variables explicatives. C'est un modèle Dynamique.

Dans le cas de modèle autorégressif la statistique de DW est remplacée par la statistique H de Durbin.

Test de l'autocorrélation d'ordre 1  $\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + u_t$  où  $u$  est un bruit blanc (pas d'autocorrélation entre les  $u_t$ )

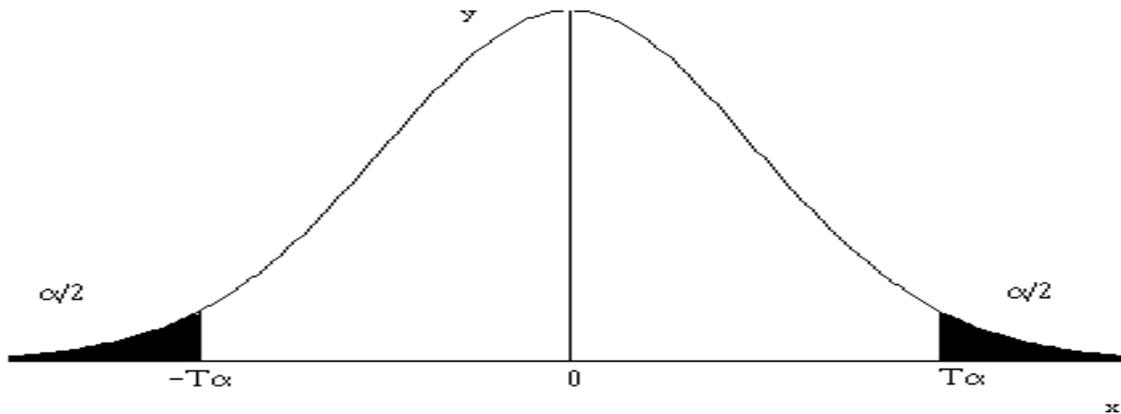
$H_0 : \rho = 0$  pas d'autocorrélation d'ordre 1

$H_1 : \rho \neq 0$  autocorrélation d'ordre 1 des erreurs

La statistique H de Durbin

$$H = \frac{1 - DW/2}{\sqrt{1/n - \widehat{Var}(\hat{a}_1)}}$$

suit sous l'hypothèse  $H_0$  une loi Normale  $N(0,1)$ . On décide donc  $H_0$  si H est compris entre  $-T_\alpha$  et  $+T_\alpha$  au risque  $\alpha = 0,05$  de se tromper.



La borne  $T_\alpha \simeq 1.96$  et la statistique  $H = \frac{1-1,77/2}{\sqrt{1/64-(0,913/21,11)^2}} = 0,98$  donc très nettement dans l'intervalle d'acceptation de  $H_0$ , il n'y a pas d'autocorrélation d'ordre 1 des erreurs. N'ayant pas la statistique Q de Ljung-Box nous ne savons pas s'il y a autocorrélation d'ordre  $>1$ .

2) Méthode de Breusch- Pagan ( voir cours)

Pour expliquer les résidus on trouve les deux meilleurs modèles ( s les plus petits 136 et 137) équivalents correspondent aux erreurs expliquées par Y sans la constante ( son coefficient n'est pas significatif) ou aux erreurs expliquées par K sans la constante.

Il y a donc hétéroscédasticité car les erreurs ne sont pas indépendantes de variables explicatives.

$$\epsilon_t \simeq \alpha K_t \Rightarrow \epsilon_t^2 \simeq \alpha^2 K_t^2 \Rightarrow V(\epsilon_t) = \alpha^2 K_t^2$$

Donc pour avoir une erreur u qui ne soit pas hétéroscédastique il suffit de diviser la variance par  $K^2$  donc le modèle par K

$$\begin{aligned} I_t &= a_1 I_{t-1} + a_2 Y_t + a_3 Y_{t-1} + a_4 + \epsilon_t \\ \frac{I_t}{K_t} &= a_1 \frac{I_{t-1}}{K_t} + a_2 \frac{Y_t}{K_t} + a_3 \frac{Y_{t-1}}{K_t} + \frac{a_4}{K_t} + \frac{\epsilon_t}{K_t} \end{aligned}$$

La nouvelle erreur a pour variance la constante  $\alpha^2$  elle est donc constante et dans ce nouveau modèle il y a homoscedasticité.

On aurait pu faire la même chose en prenant Y au lieu de K.

On peut remarquer que le coefficient  $\hat{a}_4$  n'est pas significativement différent de 0 ( 1,1 est dans l'intervalle -1,96 1,96) on peu donc écrire le modèle

$$\frac{I_t}{K_t} = a_1 \frac{I_{t-1}}{K_t} + a_2 \frac{Y_t}{K_t} + a_3 \frac{Y_{t-1}}{K_t} + \frac{\epsilon_t}{K_t}$$

3) Test de Goldfeld et Quandt

On a deux sous-ensembles, la régression faite avec les 28 premiers éléments et celle effectuée avec les 28 derniers et on va tester si leurs variances des erreurs sont identiques.

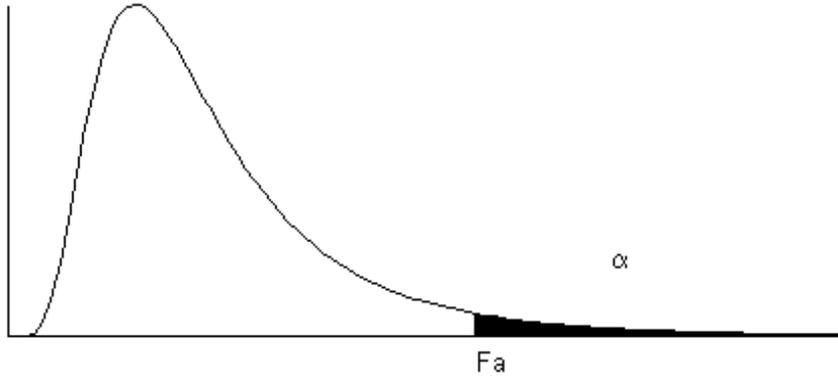
Pour cela on fait l'hypothèse de monotonie de la variance des erreurs sous l'hypothèse  $H_1$  et l'hypothèse de normalité des erreurs.

On met au numérateur la variance la plus grande ici  $s_2 = 521,32$  est  $> s_1 = 306,76$

On va donc construire le test sur les variance théoriques  $H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2$  contre  $H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$

Sous l'hypothèse H0 vrai

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \text{ suit une loi de Fisher (28-4,28-4)}$$



Dans notre échantillon  $f = \left(\frac{521,32}{306,76}\right)^2 = 2.89$

La borne du Fisher  $F_\alpha = 1,98$  on décide nettement H1 il y a hétéroscédasticité.

### 3 Corrigé de l'exercice III-3

1) Pour que les erreurs suivent une loi Normale il faut que la skewness théorique soit nulle et la kurtosis théorique égale à 3

a) test H01 :  $\alpha_3 = 0$  contre H11 :  $\alpha_3 \neq 0$

Sous l'hypothèse H01 vraie l'estimateur  $\widehat{\alpha}_3$  de  $\alpha_3$  suit asymptotiquement une loi  $N(0,3!/n)$

$$t = \widehat{\alpha}_3 \sqrt{\frac{n}{6}} \text{ suit asymptotiquement une loi } N(0,1)$$

si  $-1,96 < t < 1,96$  on décide H01 sinon on décide H11

dans l'échantillon  $\widehat{\alpha}_3 = 0,092$  donc  $\widehat{\alpha}_3 \sqrt{\frac{n}{6}} = 0,092 \sqrt{78/6} = 0,33$  on décide donc H01 la skewness est nulle

b) test H02 :  $\alpha_4 = 3$  contre H12 :  $\alpha_4 \neq 3$

Sous l'hypothèse H02 vraie l'estimateur  $\widehat{\alpha}_4$  de  $\alpha_4$  suit asymptotiquement une loi  $N(3,4!/n)$

$$t = (\widehat{\alpha}_4 - 3) \sqrt{\frac{n}{24}} \text{ suit asymptotiquement une loi } N(0,1)$$

si  $-1,96 < t < 1,96$  on décide H02 sinon on décide H12

dans l'échantillon  $\widehat{\alpha}_4 = 3,045$  donc  $(\widehat{\alpha}_4 - 3) \sqrt{\frac{n}{24}} = 0,045 \sqrt{78/24} = 0,081$  on décide donc H02 la Kurtosis est égale à 3

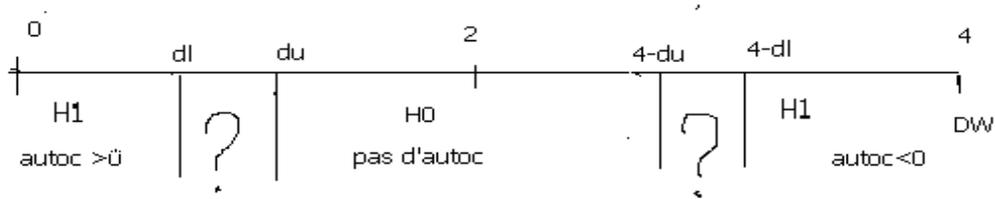
Ces deux résultats indiquent que nous pouvons accepter la normalité des erreurs.

2)a) On teste l'autocorrélation d'ordre 1 des erreurs

Test de l'autocorrélation d'ordre 1  $\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$  où  $u$  est un bruit blanc ( pas d'autocorrélation entre les  $u_t$ )

H0 :  $\rho = 0$  pas d'autocorrélation d'ordre 1

H1  $\rho \neq 0$  autocorrélation d'ordre 1 des erreurs



avec  $\alpha = 0,05$   $n=78$  et  $k-1=k'=4$  on obtient sur la table  $dl=1,52$  et  $du=1,74$ , la valeur du DW étant  $DW=1,53$  nous sommes dans la zone d'incertitude mais si près de  $dl$  que l'on va décider H1, il y a de l'autocorrélation d'ordre 1

b) Autocorrélation d'ordre supérieur à 1.

test d'une autocorrélation entre 1 et  $17=r$

H0  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$  pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à  $r=17$

H1 l'un au moins des  $\rho_i \neq 0$  il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et  $r=17$

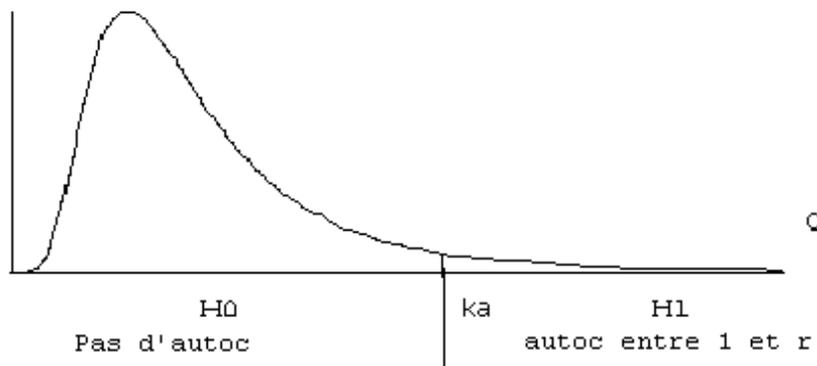
Pour l'effectuer on récupère les résidus  $e_t$  du modèle de base et on construit

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + u_t$$

Les MCO sur ce modèle donnent des estimations  $\hat{\rho}_i$  des  $\rho_i$ . Ljung et Box ont montré que sous l'hypothèse H0 la variable  $Q'$

$$Q' = n(n+2) \sum_1^r \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i}$$

suit sous l'hypothèse H0 asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté.



Ici la borne du  $\chi^2$  à 17 degrés de liberté est  $Ka=27,59$  et la valeur de  $Q$  dans l'échantillon est  $Q=17,29$ , on décide donc H0 il n'y a pas d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1.

Conclusion : On trouve seulement une autocorrélation d'ordre 1.

3) Test d'hétéroscédasticité de White

Tester si la variance des erreurs dépend des variables explicatives ou non.

H0 : la variance des erreurs est une constante

H1 : la variance des erreurs est fonction des variables, de leur carré et des produits deux à deux.

Pour cela on estime la variance par les résidus au carré et on construit le modèle linéaire des résidus au carré en fonction des variables, de leur carré et des produits deux à deux. Sous l'hypothèse  $H_0$  la variable  $nR^2$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à autant de degrés de liberté qu'il y a de variables hors la constante dans le modèle soit ici 9. ici  $Ka=16,92$  et le résultat dans l'échantillon est  $nR^2 = 78.0,055 = 4,29$  très nettement inférieur à la borne  $Ka$ , on décide donc  $H_0$  il y a homoscedasticité des erreurs.

Remarque: on prend pour  $R^2$ , le  $R^2$  centré car le modèle expliquant les résidus au carré a un terme constant.

4) Test de la stabilité du modèle:

Ici pas de calcul à faire le Fisher maximum est de 4,12 pour un niveau de significativité inférieur à  $\alpha = 0,05$ , il y a donc instabilité du modèle et on prend comme point de rupture le point correspondant au plus grand Fisher soit le premier point de la seconde période 1982:3.

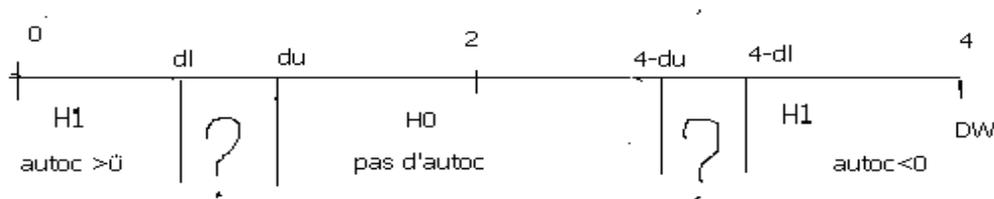
## 4 Corrigé de l'exercice III-4

1) On ne peut faire que le test d'autocorrélation et le test d'hétéroscedasticité, car nous n'avons que ces données.

a) Test de l'autocorrélation d'ordre 1  $\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + u_t$  où  $u$  est un bruit blanc (pas d'autocorrélation entre les  $u_t$ )

$H_0 : \rho = 0$  pas d'autocorrélation d'ordre 1

$H_1 \rho \neq 0$  autocorrélation d'ordre 1 des erreurs



avec  $\alpha = 0,05$   $n=50$  et  $k-1=k'=2$  on obtient sur la table  $dl=1,46$  et  $du=1,63$ , la valeur du DW étant  $DW=0,328$  nous sommes dans la zone entre 0 et  $dl$ , on va donc décider  $H_1$ , il y a de l'autocorrélation d'ordre 1.

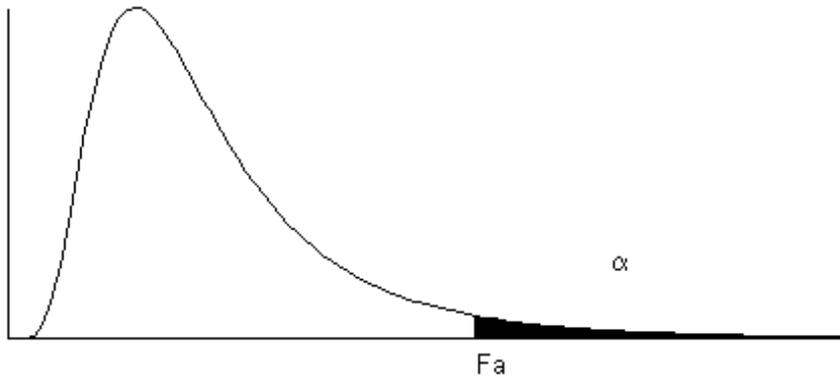
b) Test d'hétéroscedasticité. On fait l'hypothèse de normalité des erreurs.

On a un résultat qui partage l'échantillon en deux parties égales mais en ne laissant pas 1/3 de l'échantillon non utilisé, ce qui est contraire à l'utilisation du test de Goldfeld et Quandt. Nous ferons tout de même ce test.  $s_1$  est le  $s$  du premier sous-échantillon de taille 25 est  $s_2$  du second

$H_0$  les variances des erreurs sont toutes égales

$H_1$  Les variances sont différentes.

Sous l'hypothèse  $H_0$  vraie, la variable  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$  suit une loi de Fisher  $F(25-3, 25-3)$  en mettant au numérateur la variance la plus grande, le rapport est donc toujours supérieur à 1.



Si  $f$  est compris entre 1 et  $F\alpha$  on est dans le cadre de la loi du Fisher et donc on décide  $H_0$ , si  $f$  est supérieur à  $F\alpha$  on décide  $H_1$  au risque  $\alpha$  de se tromper.

ici  $f = \frac{1,22^2}{1,037^2} = 1,38$  très nettement inférieur à la borne  $F\alpha \simeq 2,07$  on décide donc  $H_0$  les erreurs sont homoscédastiques.

2) on a le modèle

$$\begin{aligned} Y_t &= a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + \epsilon_t \\ \epsilon_t &= \rho \epsilon_{t-1} + u_t \text{ où } u \text{ est BB} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Y_t &= a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + \epsilon_t \\ Y_{t-1} &= a_0 + a_1 X_{1t-1} + a_2 X_{2t-1} + \epsilon_{t-1} \end{aligned}$$

On effectue la transformation  $Y_t - \rho Y_{t-1}$  et on obtient

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = a_0(1 - \rho) + a_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + a_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \epsilon_t - \rho \epsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = a_0(1 - \rho) + a_1(X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + a_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + u_t$$

On obtient alors un nouveau modèle de variables transformées qui a une bonne erreur  $u$  BB (bruit blanc)

Pour trouver  $\rho$  la méthode de Hildreth-Lu fait un balayage pour cette dernière équation, en faisant varier  $\rho$  (ici positif car  $DW < 2$ ) et en récupérant le  $s$  de chacun des modèles. Le balayage a ici un pas de 0,1. Puis on prend comme meilleur  $\rho$  celui qui minimise le  $s$ . Ici le  $s_{\min} = 29,3$  est pour  $\rho = 0,8$ .

La méthode donne une valeur de  $\rho$ , mais a-t-on bien travaillé, c'est-à-dire a-t-on réglé le problème de l'autocorrélation?

Pour le savoir on regarde le DW du modèle correspondant à  $\rho = 0,8$  et on trouve  $DW = 1,3$

Test de DW : on a sensiblement les mêmes résultats de dans la question 1) car  $n=49$  et  $k-1=2$  donc  $d_l \simeq 1,46$ .  $DW$  est compris entre 0 et  $d_l$  on décide donc  $H_1$  l'autocorrélation est un peu moins forte que dans la question 1) mais elle reste. On a donc fait le travail pour rien. Comme nous l'avons vu dans le cours, il ne faut jamais se précipiter pour traiter l'autocorrélation mais faire avant tous les tests.

3) Test de stabilité de Chow:

On a fait l'hypothèse ici que le point de rupture était le N°26. Tout l'échantillon est bien pris les 25 premiers trimestres et les 25 derniers redonnent bien l'échantillon de base.

H0 les coefficients sont identiques dans les périodes 1 et 2

si H0 est vrai on peut donc regrouper les deux sous-échantillons et donc prendre le modèle global

Tout l'échantillon :  $s = 54,472 \Rightarrow SRC_0 = (n - k)s^2 = (50 - 3)54,472^2 = 139458,34$  et (50-3) le nombre de degrés de liberté

Sur la période 1 :  $s = 1,22 \Rightarrow SCR1 = (25 - 3)1,22^2 = 32,7448$  et (25-3) le nombre de degrés de liberté.

Sur la période 2 :  $s = 1,037 \Rightarrow SCR2 = (25 - 3)1,037^2 = 23,6581$  et (25-3) le nombre de degrés de liberté.

Sous l'hypothèse H1 les coefficients ne sont pas les mêmes dans les deux périodes et le  $SRC_a$  global est  $SCR1+SCR2=56,4029$  et  $(25-3+25-3)=(50-6)$  le nombre de degrés de liberté.

Sous l'hypothèse H0 vraie la variable

$$F = \frac{(SCR0 - SCR_a)/(50 - 3 - 50 + 6)}{SCR_a/(50 - 6)}$$

suit une loi de Fisher (3,44)

Dans l'échantillon  $f=36249$  et la borne  $F\alpha = 2,79$  comme  $36249$  est très nettement  $>2,79$  on décide H1 le modèle est instable et il y a un point de rupture ( au moins)

Dans les deux sous- périodes on constate que le DW est bien proche de 2 et donc qu'il n'y a plus d'autocorrélation. Pour régler le problème d'autocorrélation, il faut donc partager les modèle en deux périodes. On peut constater que les coefficients de  $x_1$  et  $x_2$  dans les deux sous-périodes sont en effet très différents.

## 5 Corrigé de l'exercice III-5

1) Ces 3 modèles ont la même variables endogène ( expliquée) et sont estimés par le même échantillon, on peut donc les comparer.

Modèle 1  $s = 0,798$     Modèle 2  $s = 1,1625$     Modèle 3  $s = 0,5235$

On décide donc de garder le modèle 3 qui contient les deux variables et une variable muette.

2) Etudes des propriétés des erreurs du modèle:

- Etude de la normalité des erreurs

Pour que les erreurs suivent une loi Normale il faut que la skewness théorique soit nulle et la kurtosis théorique égale à 3

a) test H01 :  $\alpha_3 = 0$  contre H11 :  $\alpha_3 \neq 0$

Sous l'hypothèse H01 vraie l'estimateur  $\widehat{\alpha}_3$  de  $\alpha_3$  suit asymptotiquement une loi  $N(0,3!/n)$

$$t = \widehat{\alpha}_3 \sqrt{\frac{n}{6}} \text{ suit asymptotiquement une loi } N(0,1)$$

si  $-1,96 < t < 1,96$  on décide H01 sinon on décide H11 au risque 0,05 de se tromper

dans l'échantillon  $\widehat{\alpha}_3 = 0,35$  donc  $\widehat{\alpha}_3 \sqrt{\frac{n}{6}} = 0,35 \sqrt{128/6} = 1,616$  on décide donc H01 la skewness est nulle

b) test H02 :  $\alpha_4 = 3$  contre H12 :  $\alpha_4 \neq 3$

Sous l'hypothèse H02 vraie l'estimateur  $\widehat{\alpha}_4$  de  $\alpha_4$  suit asymptotiquement une loi  $N(3,4!/n)$

$$t = (\widehat{\alpha}_4 - 3) \sqrt{\frac{n}{24}} \text{ suit asymptotiquement une loi } N(0,1)$$

si  $-1,96 < t < 1,96$  on décide H02 sinon on décide H12

dans l'échantillon  $\widehat{\alpha}_4 = 3,086$  donc  $(\widehat{\alpha}_4 - 3) \sqrt{\frac{n}{24}} = 0,086 \sqrt{128/24} = 0,2$  on décide donc H02 la Kurtosis est égale à 3

Ces deux résultats indiquent que nous pouvons accepter la normalité des erreurs.

- Etude de l'hétéroscédasticité:

Test de White : Tester si la variance des erreurs dépend des variables explicatives ou non.

H0 : la variance des erreurs est une constante

H1 : la variance des erreurs est fonction des variables, de leur carré et des produits deux à deux.

Pour cela on estime la variance par les résidus au carré et on construit le modèle linéaire des résidus au carré en fonction des variables, de leur carré et des produits deux à deux.

Sous l'hypothèse H0 la variable  $nR^2$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à autant de degrés de liberté qu'il y a de variables hors la constante dans le modèle soit ici 5.

ici  $Ka = 11,07$  et le résultat dans l'échantillon est  $nR^2 = 128,0,2144 = 27,44$  très nettement supérieur à la borne  $Ka$ , on décide donc H1 nous ne sommes plus dans le cadre de la loi du  $\chi^2$  au risque 0,05 de se tromper il y a donc hétéroscédasticité des erreurs.

Remarque: on prend pour  $R^2$ , le  $R^2$  centré car le modèle expliquant les résidus au carré a un terme constant.

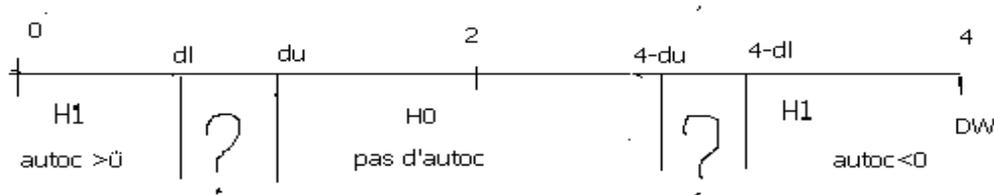
- Etude de l'autocorrélation des erreurs:

a) autocorrélation d'ordre 1 des erreurs: nous ne sommes pas dans le cadre d'un modèle autorégressif nous utilisons donc la statistique de DW

Test de l'autocorrélation d'ordre 1  $\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$  où  $u$  est un bruit blanc ( pas d'autocorrélation entre les  $u_t$ )

H0 :  $\rho = 0$  pas d'autocorrélation d'ordre 1

H1 :  $\rho \neq 0$  autocorrélation d'ordre 1 des erreurs



avec  $\alpha = 0,05$   $n=128$  et  $k-1=k'=3$  on obtient sur la table  $dl=1,61$  et  $du=1,74$ , la valeur du DW étant  $DW=0,688$  nous sommes dans la zone entre 0 et  $dl$ , on va donc décider  $H_1$ , il y a de l'autocorrélation d'ordre 1.

b) autocorrélation d'ordre supérieur à 1: test de Ljung-Box

$H_0 \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0$  pas d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 à  $r$

$H_1$  l'un au moins des  $\rho_i \neq 0$  il y a autocorrélation des erreurs d'ordre entre 1 et  $r$

Pour l'effectuer on récupère les résidus  $e_t$  du modèle de base et on construit

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_r e_{t-r} + u_t$$

Les MCO sur ce modèle donnent des estimations  $\hat{\rho}_i$  des  $\rho_i$ . Ljung et Box ont montré que sous l'hypothèse  $H_0$  la variable  $Q'$

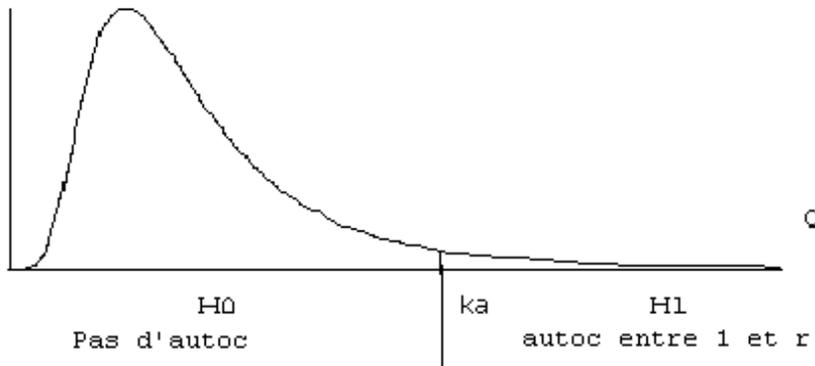
$$Q' = n(n+2) \sum_{i=1}^r \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i}$$

suit sous l'hypothèse  $H_0$  une loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté.

Par la suite on notera  $Q$  cette statistique car elle est beaucoup plus utilisée que la statistique de Box-Pierce.

Valeur de  $r$ , RATS propose de regarder au maximum pour **rmax = partie entière du MIN( n/4, 2√n)**

Dans cet exemple Rats propose  $r=32 = n/4$



Si  $Q$  est inférieur à la borne  $K\alpha$  nous sommes dans le cadre de la loi du  $\chi_r^2$  et on décide  $H_0$ , si  $Q > K\alpha$  on n'est plus dans le cadre de la loi du  $\chi_r^2$  au risque 0,05 de se tromper et on décide  $H_1$ .

Ici  $K\alpha = 43,8$  et  $Q = 185,81$  (dans la régression modèle 3) on décide donc très nettement  $H_1$ , il y a autocorrélation d'ordre  $>1$ .

Comme on nous donne aussi le niveau de significativité; c'est-à-dire  $\text{Prob}(\chi_r^2 > 185,81) = 0,000$  cette probabilité est presque nulle donc la valeur est très à droite de la borne  $K\alpha$  on décide donc  $H_1$ . Cette P-value (niveau de significativité) est fournie dans la plupart des logiciels et évite d'aller chercher sur les tables les valeurs de  $K\alpha$

Conclusion : les erreurs suivent la loi Normale, il y a hétéroscédasticité et autocorrélation des erreurs.

3) Propriétés des coefficients:

a) significativité des coefficients : tests de Student

On reprend le modèle 3 pour tester la significativité de ses coefficients sous l'hypothèse de normalité.

On va le faire ici avec la P-value (niveau de significativité)

Coefficient de la constante  $\text{Prob}(T < -0,091 \text{ ou } T > +0,091) = 0,9275$  très nettement supérieur à  $\alpha = 0,05$  on décide donc  $H_0$  le coefficient est nul

Coefficient de R3  $\text{Prob}(T < -22,186 \text{ ou } T > +22,186) = 0,0000$  très nettement inférieur à  $\alpha$  on décide donc  $H_1$  le coefficient est différent de 0

Coefficient de R10  $\text{Prob}(T < -12,9 \text{ ou } T > 12,9) = 0,0000$  très nettement inférieur à  $\alpha$  on décide donc  $H_1$  le coefficient est différent de 0

Coefficient de DU823  $\text{Prob}(T < -3,37 \text{ ou } T > +3,37) = 0,00099$  très nettement inférieur à  $\alpha$  on décide donc  $H_1$  le coefficient est différent de 0.

b) Test de stabilité de Chow

L'éventuel point de rupture correspond au Fisher le plus grand dans le balayage des sous-périodes. Celui-ci est  $f=17,47$ . Y a-t-il point de rupture? Pour cela il faut que ce Fisher soit supérieur à la borne  $F\alpha$ . Pour le tester on va utiliser le niveau de significativité donné. Rats indique que  $\text{Prob}(F > 17,47) = 0,00000$  très inférieur à  $\alpha = 0,05$  on décide donc  $H_1$  le modèle est instable et le point de rupture est 1981:3

Remarque importante : nous venons de faire le test de Chow, mais nous sommes dans un modèle présentant de l'hétéroscédasticité, le test (voir le cours) n'est acceptable que si le résultat est très loin de la borne  $F\alpha$  ce qui est le cas ici car la P-Value est pratiquement nulle donc très inférieure à  $\alpha = 0,05$ .

4) Premier sous-modèle:

Ici nous donnerons seulement les résultats sans reprendre toute la théorie, je vous conseille cependant, tant que les notions ne sont pas complètement acquises de reprendre la théorie à chaque test.

a) test d'hétéroscédasticité de White

Sous l'hypothèse  $H_0$  la variable  $nR^2$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2_5$  dont la borne  $K\alpha = 11,07$

La valeur de  $K=nR^2=86,0,0955=8,21$  nettement inférieur à  $K\alpha$  on est donc dans le cadre de la loi du  $\chi^2$  et on décide  $H_0$  il y a homoscedasticité.

b) Test d'autocorrélation d'ordre 1

DW = 0,789 est nettement inférieur à la valeur  $dl=1,60$  on décide donc autocorrélation des erreurs d'ordre 1.

c) Test d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1

Rats donne  $Q(r=21)=77,346$  avec un niveau de significativité  $ns=0,0000$  inférieur à  $\alpha = 0,05$  on décide donc  $H_1$  il y a autocorrélation supérieure à 1.

d) traitement de l'autocorrélation :

On utilise la méthode de Hildreth-Lu, la valeur estimée de  $\rho$  dans le modèle transformé est 0,726 et dans ce modèle transformé le DW est bon et la statistique Q très limite.

e) Les coefficients sont tous significativement différents de 0 (on ne retrouve pas la variable muette car elle est dans la seconde partie)

5) Deuxième sous-modèle:

a) test d'hétéroscédasticité de White

Sous l'hypothèse  $H_0$  la variable  $nR^2$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2_5$  dont la borne  $K\alpha = 11,07$

La valeur de  $K=nR^2=42.0,17=7,14$  nettement inférieur à  $K\alpha$  on est donc dans le cadre de la loi du  $\chi^2$  et on décide  $H_0$  il y a homoscedasticité.

b) Test d'autocorrélation d'ordre 1

DW = 1,22 est nettement inférieur à la valeur  $dl=1,34$  on décide donc autocorrélation des erreurs d'ordre 1.

c) Test d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1

Rats donne  $Q(r=10)=12,27$  avec un niveau de significativité  $ns=0,267$  supérieur à  $\alpha = 0,05$  on décide donc  $H_0$  il n'y a pas d'autocorrélation supérieure à 1.

d) traitement de l'autocorrélation :

On utilise la méthode de Hildreth-Lu, la valeur estimée de  $\rho$  dans le modèle transformé est 0,49 et dans ce modèle transformé le DW est bon et la statistique Q également.

e) Les coefficients sont tous significativement différents de 0

6) Conclusion:

La séparation en deux sous-périodes a permis de résoudre le problème d'hétéroscédasticité mais pas celui d'autocorrélation. En traitant cette autocorrélation on élimine pratiquement l'autocorrélation, mais ce n'est pas très satisfaisant, dans ce modèle global il doit manquer des variables que l'on pourrait peut-être résoudre par des modèles dynamiques que l'on verra par la suite.